

《离散数学》题库答案

一、选择或填空

(数理逻辑部分)

1、下列哪些公式为永真蕴含式? ()

(1) $\neg Q \Rightarrow Q \rightarrow P$ (2) $\neg Q \Rightarrow P \rightarrow Q$ (3) $P \Rightarrow P \rightarrow Q$ (4) $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow \neg P$

2、下列公式中哪些是永真式? ()

(1) $(\neg P \wedge Q) \rightarrow (Q \rightarrow \neg R)$ (2) $P \rightarrow (Q \rightarrow Q)$ (3) $(P \wedge Q) \rightarrow P$ (4) $P \rightarrow (P \vee Q)$

3、设有下列公式, 请问哪几个是永真蕴涵式? ()

(1) $P \Rightarrow P \wedge Q$ (2) $P \wedge Q \Rightarrow P$ (3) $P \wedge Q \Rightarrow P \vee Q$

(4) $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ (5) $\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow P$ (6) $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow \neg P$

4、公式 $\forall x ((A(x) \rightarrow B(y, x)) \wedge \exists z C(y, z)) \rightarrow D(x)$ 中, 自由变元是(), 约束变元是()。

5、判断下列语句是不是命题。若是, 给出命题的真值。()

(1) 北京是中华人民共和国的首都。 (2) 陕西师大是一座工厂。

(3) 你喜欢唱歌吗? (4) 若 $7+8 > 18$, 则三角形有 4 条边。

(5) 前进! (6) 给我一杯水吧!

(4) 是, T (5) 不是 (6) 不是

6、命题“存在一些人是大学生”的否定是(), 而命题“所有的人都是要死的”的否定是()。

7、设 P : 我生病, Q : 我去学校, 则下列命题可符号化为()。

(1) 只有在生病时, 我才不去学校 (2) 若我生病, 则我不去学校

(3) 当且仅当我生病时, 我才不去学校 (4) 若我不生病, 则我一定去学校

8、设个体域为整数集, 则下列公式的意义是()。

(1) $\forall x \exists y (x+y=0)$ (2) $\exists y \forall x (x+y=0)$

9、设全体域 D 是正整数集合, 确定下列命题的真值:

(1) $\forall x \exists y (xy=y)$ () (2) $\exists x \forall y (x+y=y)$ ()

(3) $\exists x \forall y (x+y=x)$ () (4) $\forall x \exists y (y=2x)$ ()

10、设谓词 $P(x)$: x 是奇数, $Q(x)$: x 是偶数, 谓词公式 $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ 在哪个个体域中为真? ()

(1) 自然数 (2) 实数 (3) 复数 (4) (1)---(3)均成立

11、命题“2是偶数或-3是负数”的否定是()。

12、永真式的否定是()

(1) 永真式 (2) 永假式 (3) 可满足式 (4) (1)---(3)均有可能

13、公式 $(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 化简为(), 公式 $Q \rightarrow (P \vee (P \wedge Q))$ 可化简为()。

14、谓词公式 $\forall x(P(x) \vee \exists yR(y)) \rightarrow Q(x)$ 中量词 $\forall x$ 的辖域是()。

15、令 $R(x):x$ 是实数, $Q(x):x$ 是有理数。则命题“并非每个实数都是有理数”的符号化表示为()。

(集合论部分)

16、设 $A=\{a, \{a\}\}$, 下列命题错误的是()。

(1) $\{a\} \in P(A)$ (2) $\{a\} \subseteq P(A)$ (3) $\{\{a\}\} \in P(A)$ (4) $\{\{a\}\} \subseteq P(A)$

17、在 \emptyset () Φ 之间写上正确的符号。

(1) = (2) \subseteq (3) \in (4) \notin

18、若集合 S 的基数 $|S|=5$, 则 S 的幂集的基数 $|P(S)|=()$ 。

19、设 $P=\{x | (x+1)^2 \leq 4 \text{ 且 } x \in \mathbb{R}\}$, $Q=\{x | 5 \leq x^2 + 16 \text{ 且 } x \in \mathbb{R}\}$, 则下列命题哪个正确()

(1) $Q \subset P$ (2) $Q \subseteq P$ (3) $P \subset Q$ (4) $P=Q$

20、下列各集合中, 哪几个分别相等()。

(1) $A_1=\{a, b\}$ (2) $A_2=\{b, a\}$ (3) $A_3=\{a, b, a\}$ (4) $A_4=\{a, b, c\}$

(5) $A_5=\{x | (x-a)(x-b)(x-c)=0\}$ (6) $A_6=\{x | x^2-(a+b)x+ab=0\}$

21、若 $A-B=\Phi$, 则下列哪个结论不可能正确?()

(1) $A=\Phi$ (2) $B=\Phi$ (3) $A \subset B$ (4) $B \subset A$

22、判断下列命题哪个为真?()

(1) $A-B=B-A \Rightarrow A=B$ (2) 空集是任何集合的真子集

(3) 空集只是非空集合的子集 (4) 若 A 的一个元素属于 B , 则 $A=B$

23、判断下列命题哪几个为正确?()

(1) $\{\Phi\} \in \{\Phi, \{\{\Phi\}\}\}$ (2) $\{\Phi\} \subseteq \{\Phi, \{\{\Phi\}\}\}$ (3) $\Phi \in \{\{\Phi\}\}$

(4) $\Phi \subseteq \{\Phi\}$ (5) $\{a, b\} \in \{a, b, \{a\}, \{b\}\}$

24、判断下列命题哪几个正确?()

(1) 所有空集都不相等 (2) $\{\Phi\} \neq \Phi$ (4) 若 A 为非空集, 则 $A \subset A$ 成立。

25、设 $A \cap B = A \cap C$, $\bar{A} \cap B = \bar{A} \cap C$, 则 B () C 。

26、判断下列命题哪几个正确? ()

- (1) 若 $A \cup B = A \cup C$, 则 $B = C$
- (2) $\{a, b\} = \{b, a\}$
- (3) $P(A \cap B) \neq P(A) \cap P(B)$ ($P(S)$ 表示 S 的幂集)
- (4) 若 A 为非空集, 则 $A \neq A \cup A$ 成立。

27、 A, B, C 是三个集合, 则下列哪几个推理正确:

- (1) $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
- (2) $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \in B$
- (3) $A \in B, B \in C \Rightarrow A \in C$

(二元关系部分)

28、设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 从 A 到 B 的关系 $R = \{\langle x, y \rangle \mid x = y^2\}$, 求 (1) R
(2) R^{-1} 。

29、举出集合 A 上的既是等价关系又是偏序关系的一个例子。()

30、集合 A 上的等价关系的三个性质是什么? ()

31、集合 A 上的偏序关系的三个性质是什么? ()

32、设 $S = \{1, 2, 3, 4\}$, A 上的关系 $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$
求 (1) $R \circ R$ (2) R^{-1} 。

$R^{-1} = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle\}$

33、设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, R 是 A 上的整除关系, 求 $R = \{(\quad)\}$ 。
 $\langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 6 \rangle\}$

34、设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 从 A 到 B 的关系 $R = \{\langle x, y \rangle \mid x = 2y\}$, 求 (1) R
(2) R^{-1} 。

35、设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 从 A 到 B 的关系 $R = \{\langle x, y \rangle \mid x = y^2\}$, 求 R
和 R^{-1} 的关系矩阵。

36、集合 $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ 上的关系 $R = \{\langle x, y \rangle \mid x + y = 10, x, y \in A\}$, 则 R 的性质为 ()。

- (1) 自反的
- (2) 对称的
- (3) 传递的, 对称的
- (4) 传递的

(图论部分)

54、设 G 是一个哈密尔顿图, 则 G 一定是 ()。

- (1) 欧拉图
- (2) 树
- (3) 平面图
- (4) 连通图

- 55、下面给出的集合中，哪一个是前缀码？()
- (1) {0, 10, 110, 101111} (2) {01, 001, 000, 1}
- (3) {b, c, aa, ab, aba} (4) {1, 11, 101, 001, 0011}
- 56、一个图的哈密尔顿路是一条通过图中()的路。
- 57、在有向图中，结点 v 的出度 $\text{deg}^+(v)$ 表示()，入度 $\text{deg}^-(v)$ 表示()。
- 58、设 G 是一棵树，则 G 的生成树有()棵。
- (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 不能确定
- 59、 n 阶无向完全图 K_n 的边数是()，每个结点的度数是()。
- 60、一棵无向树的顶点数 n 与边数 m 关系是()。
- 61、一个图的欧拉回路是一条通过图中()的回路。
- 62、有 n 个结点的树，其结点度数之和是()。
- 63、下面给出的集合中，哪一个不是前缀码()。
- (1) {a, ab, 110, a1b11} (2) {01, 001, 000, 1}
- (3) {1, 2, 00, 01, 0210} (4) {12, 11, 101, 002, 0011}
- 64、 n 个结点的有向完全图边数是()，每个结点的度数是()。
- 65、一个无向图有生成树的充分必要条件是()。
- 66、设 G 是一棵树， n, m 分别表示顶点数和边数，则
- (1) $n=m$ (2) $m=n+1$ (3) $n=m+1$ (4) 不能确定。
- 67、设 $T = \langle V, E \rangle$ 是一棵树，若 $|V| > 1$ ，则 T 中至少存在()片树叶。
- 68、任何连通无向图 G 至少有()棵生成树，当且仅当 G 是()， G 的生成树只有一棵。
- 69、设 G 是有 n 个结点 m 条边的连通平面图，且有 k 个面，则 k 等于：
- (1) $m-n+2$ (2) $n-m-2$ (3) $n+m-2$ (4) $m+n+2$ 。
- 70、设 T 是一棵树，则 T 是一个连通且()图。
- 71、设无向图 G 有 16 条边且每个顶点的度数都是 2，则图 G 有()个顶点。
- (1) 10 (2) 4 (3) 8 (4) 16
- 72、设无向图 G 有 18 条边且每个顶点的度数都是 3，则图 G 有()个顶点。
- (1) 10 (2) 4 (3) 8 (4) 12
- 73、设图 $G = \langle V, E \rangle$ ， $V = \{a, b, c, d, e\}$ ， $E = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, e \rangle\}$ ，则 G 是有向图还是无向图？

- 74、任一有向图中，度数为奇数的结点有()个。
- 75、具有 6 个顶点，12 条边的连通简单平面图中，每个面都是由()条边围成?
 (1) 2 (2) 4 (3) 3 (4) 5
- 76、在有 n 个顶点的连通图中，其边数()。
 (1) 最多有 $n-1$ 条 (2) 至少有 $n-1$ 条
 (3) 最多有 n 条 (4) 至少有 n 条
- 77、一棵树有 2 个 2 度顶点，1 个 3 度顶点，3 个 4 度顶点，则其 1 度顶点为()。
 (1) 5 (2) 7 (3) 8 (4) 9
- 78、若一棵完全二元(叉)树有 $2n-1$ 个顶点，则它()片树叶。
 (1) n (2) $2n$ (3) $n-1$ (4) 2
- 79、下列哪一种图不一定是树()。
 (1) 无简单回路的连通图 (2) 有 n 个顶点 $n-1$ 条边的连通图
 (3) 每对顶点间都有通路的图 (4) 连通但删去一条边便不连通的图
- 80、连通图 G 是一棵树当且仅当 G 中()。
 (1) 有些边是割边 (2) 每条边都是割边
 (3) 所有边都不是割边 (4) 图中存在一条欧拉路径

(数理逻辑部分)

二、求下列各公式的主析取范式和主合取范式：

1、 $(P \rightarrow Q) \wedge R$

2、 $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \vee \neg P$

$$3、 (\neg P \rightarrow Q) \wedge (R \vee P)$$

$$4、 Q \rightarrow (P \vee \neg R)$$

$$5、 P \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow P))$$

$$6、 \neg (P \rightarrow Q) \vee (R \wedge P)$$

$$7、 P \vee (P \rightarrow Q)$$

$$8、 (R \rightarrow Q) \wedge P$$

9、 $P \rightarrow Q$

10、 $P \vee \neg Q$

11、 $P \wedge Q$

12、 $(P \vee R) \rightarrow Q$

13、 $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$

14、 $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge \neg R))$

$$15、P \vee (\neg P \rightarrow (Q \vee (\neg Q \rightarrow R)))$$

$$16、(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$$

三、证明：

$$1、P \rightarrow Q, \neg Q \vee R, \neg R, \neg S \vee P \Rightarrow \neg S$$

$$2、A \rightarrow (B \rightarrow C), C \rightarrow (\neg D \vee E), \neg F \rightarrow (D \wedge \neg E), A \Rightarrow B \rightarrow F$$

$$3、P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S \Rightarrow R \vee S$$

$$4、(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S), (Q \rightarrow W) \wedge (S \rightarrow X), \neg (W \wedge X), P \rightarrow R \Rightarrow \neg P$$

$$5、(U \vee V) \rightarrow (M \wedge N), U \vee P, P \rightarrow (Q \vee S), \neg Q \wedge \neg S \Rightarrow M$$

$$6、\neg B \vee D, (E \rightarrow \neg F) \rightarrow \neg D, \neg E \Rightarrow \neg B$$

$$7、P \rightarrow (Q \rightarrow R), R \rightarrow (Q \rightarrow S) \Rightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow S)$$

$$8、P \rightarrow \neg Q, \neg P \rightarrow R, R \rightarrow \neg S \Rightarrow S \rightarrow \neg Q$$

$$9、P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

$$10、P \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg R), Q \rightarrow \neg P, S \rightarrow R, P \Rightarrow \neg S$$

$$11、 A, A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow (D \rightarrow \neg C) \Rightarrow \neg D$$

$$12、 A \rightarrow (C \vee B), B \rightarrow \neg A, D \rightarrow \neg C \Rightarrow A \rightarrow \neg D$$

$$13、 (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \vee R) \rightarrow Q$$

$$14、 P \rightarrow (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow \neg P \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$$

$$15、 (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R), \neg (Q \wedge R), S \vee P \Rightarrow S$$

$$16、 P \rightarrow \neg Q, Q \vee \neg R, R \wedge \neg S \Rightarrow \neg P$$

17、用真值表法证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

18、 $P \rightarrow Q \Rightarrow P \rightarrow (P \wedge Q)$

19、用先求主范式的方法证明 $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \rightarrow (Q \wedge R))$

20、 $(P \rightarrow Q) \wedge \neg(Q \vee R) \Rightarrow \neg P$

21、为庆祝九七香港回归祖国，四支足球队进行比赛，已知情况如下，问结论是否有效？

前提：(1) 若 A 队得第一，则 B 队或 C 队获亚军；

(2) 若 C 队获亚军，则 A 队不能获冠军；

(3) 若 D 队获亚军，则 B 队不能获亚军；

(4) A 队获第一；

结论：(5) D 队不是亚军。

22、用推理规则证明 $P \rightarrow Q, \neg(Q \vee R), P \wedge R$ 不能同时为真。

(集合论部分)

四、设 A, B, C 是三个集合，证明：

1、 $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

2、 $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$

3、 $A \cup B = A \cup C, \bar{A} \cup B = \bar{A} \cup C$ ，则 $C = B$

4、 $A \cup B = A \cup (B - A)$

5、 $A=B \Leftrightarrow A \oplus B = \Phi$

6、 $A \cap B = A \cap C, A \cup B = A \cup C$, 则 $C=B$

7、 $A \cap B = A \cap C, \bar{A} \cap B = \bar{A} \cap C$, 则 $C=B$

8、 $A - (B \cup C) = (A - B) - C$

9、 $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$

10、 $A - B = B$, 则 $A = B = \Phi$

$$11、 A = (A-B) \cup (A-C) \Leftrightarrow A \cap B \cap C = \Phi$$

$$12、 (A-B) \cap (A-C) = \Phi \Leftrightarrow A \subseteq B \cup C$$

$$13、 (A-B) \cup (B-A) = A \Leftrightarrow B = \Phi$$

$$14、 (A-B) - C \subseteq A - (B-C)$$

$$15、 P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B) \quad (P(S) \text{ 表示 } S \text{ 的幂集})$$

$$16、 P(A) \cap P(B) = P(A \cap B) \quad (P(S) \text{ 表示 } S \text{ 的幂集})$$

17、 $(A-B) \cup B = (A \cup B) - B$ 当且仅当 $B = \Phi$ 。

五、证明或解答：

（数理逻辑、集合论与二元关系部分）

1、设个体域是自然数，将下列各式翻译成自然语言：

- (1) $\exists x \forall y (xy=1)$; (2) $\forall x \exists y (xy=1)$;
(3) $\forall x \exists y (xy=0)$; (4) $\exists x \forall y (xy=0)$;
(5) $\forall x \exists y (xy=x)$; (6) $\exists x \forall y (xy=x)$;
(7) $\forall x \forall y \exists z (x-y=z)$

2、设 $A(x, y, z) : x+y=z$, $M(x, y, z) : xy=z$, $L(x, y) : x < y$, $G(x, y) : x > y$, 个体域为自然数。将下列命题符号化：

- (1) 没有小于 0 的自然数；
(2) $x < z$ 是 $x < y$ 且 $y < z$ 的必要条件；
(3) 若 $x < y$, 则存在某些 z , 使 $z < 0$, $xz > yz$ ；
(4) 存在 x , 对任意 y 使得 $xy=y$ ；
(5) 对任意 x , 存在 y 使 $x+y=x$ 。

3、列出下列二元关系的所有元素：

- (1) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 2, 4\}$, $R = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \cap B\}$;
- (2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2\}$, $R = \{\langle x, y \rangle \mid 2 \leq x+y \leq 4 \text{ 且 } x \in A \text{ 且 } y \in B\}$;
- (3) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$, $R = \{\langle x, y \rangle \mid |x| = |y| \text{ 且 } x \in A \text{ 且 } y \in B\}$;

4、对任意集合 A, B , 证明: 若 $A \times A = B \times B$, 则 $B = A$ 。

5、对任意集合 A, B , 证明: 若 $A \neq \Phi$, $A \times B = A \times C$, 则 $B = C$ 。

6、设 $A = \{a, b\}$, $B = \{c\}$ 。求下列集合:

- (1) $A \times \{0, 1\} \times B$; (2) $B^2 \times A$;
- (3) $(A \times B)^2$; (4) $P(A) \times A$ 。

7、设全集 $U = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, d\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{b, d\}$ 。求下列各集合:

- (1) $A \cap B \cap \bar{C}$; (2) $\overline{A \cap B \cap C}$; (3) $(A \cap \bar{B}) \cup C$;
- (4) $P(A) - P(B)$; (5) $(A - B) \cup (B - C)$; (6) $(A \oplus B) \cap C$;

8、设 A, B, C 是任意集合，证明或否定下列断言：

(1) 若 $A \subseteq B$ ，且 $B \subseteq C$ ，则 $A \subseteq C$ ；

(2) 若 $A \subseteq B$ ，且 $B \subseteq C$ ，则 $A \in C$ ；

(3) 若 $A \in B$ ，且 $B \in C$ ，则 $A \in C$ ；

(4) 若 $A \in B$ ，且 $B \subseteq C$ ，则 $A \in C$ ；

9、 A 上的任一良序关系一定是 A 上的全序关系。

10、若 R 和 S 都是非空集 A 上的等价关系，则 $R \cap S$ 是 A 上的等价关系。

11、设 $R \subseteq A \times A$ ，则 R 自反 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$ 。

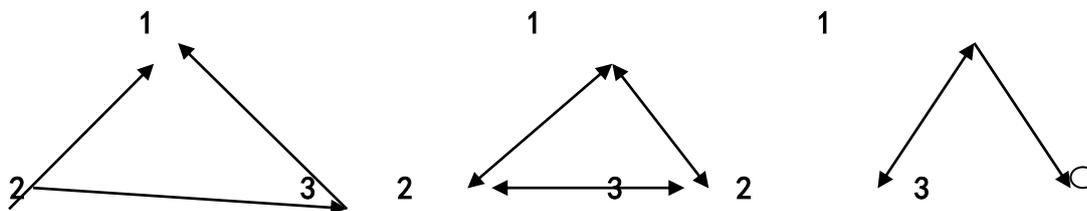
12、设 A 是集合， $R \subseteq A \times A$ ，则 R 是对称的 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$ 。

13、设 A, B, C 和 D 均是集合, $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C, T \subseteq C \times D$, 则

- (1) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$;
- (2) $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$;

14、设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $\emptyset \neq B \subseteq A$, 若 B 有最大(小)元、上(下)确界, 则它们是唯一的。

15、设 $A = \{1, 2, 3\}$, 写出下列图示关系的关系矩阵, 并讨论它们的性质:



16、设 $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ 。下列哪个是 A 的划分? 若是划分, 则它们诱导的等价关系是什么?

- (1) $B = \{\{1, 3, 6\}, \{2, 8, 10\}, \{4, 5, 7\}\}$;
- (2) $C = \{\{1, 5, 7\}, \{2, 4, 8, 9\}, \{3, 5, 6, 10\}\}$;
- (3) $D = \{\{1, 2, 7\}, \{3, 5, 10\}, \{4, 6, 8\}, \{9\}\}$

17、R 是 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上的等价关系,

$$R = I_A \cup \{ \langle 1, 5 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 6, 3 \rangle \}$$

求 R 诱导的划分。

18、A 上的偏序关系 \leq 的 Hasse 图如下。

(1) 下列哪些关系式成立: $a \leq b, b \leq a, c \leq e, e \leq f, d \leq f, c \leq f$;

(2) 分别求出下列集合关于 \leq 的极大(小)元、最大(小)元、上(下)界及上(下)确界(若存在的话):

(a) A; (b) $\{b, d\}$; (c) $\{b, e\}$; (d) $\{b, d, e\}$

