练习答案

第1章

1.1节

1. a)是，T　b)是，F　c)是，T　d)是，F
   e)否　f)否
2. a)Mei没有MP3播放器。　b)新泽西州有污染。
   c)$2+1\neq 3$。　d)缅因州的夏天不热或阳光不明媚。
3. a)Steve在其笔记本电脑上没有多于100GB剩余磁盘空间。
   b)Zach没有阻塞来自Jennifer的电子邮件，或者他没有阻塞来自Jennifer的短信。
   c)$7\cdot 11\cdot 13\neq 999$
   d)Diane没有在星期天骑了100英里自行车。
4. a)F　b)T　c)T　d)T　e)T
5. a)在海岸附近没发现过鲨鱼。
   b)在新泽西海岸游泳是允许的，并且在海岸附近发现过鲨鱼。
   c)在新泽西海岸不允许游泳，或者在海岸附近发现过鲨鱼。
   d)如果在新泽西海岸游泳是允许的，则在海岸附近没发现过鲨鱼。
   e)如果在海岸附近没发现过鲨鱼，则在新泽西海岸游泳是允许的。
   f)如果在新泽西海岸不允许游泳，则在海岸附近没发现过鲨鱼。
   g)在新泽西海岸允许游泳当且仅当在海岸附近没发现过鲨鱼。
   h)在新泽西海岸不允许游泳，并且或者在新泽西海岸允许游泳或者在海岸附近没发现过鲨鱼。（注意我们能够通过后半句的两个“或者”将其纳入括号中。）
6. a)$p\wedge q$　b)$p\wedge\neg q$　c)$\neg p\wedge\neg q$　d)$p\vee q$
   e)$p\to q$　f)$(p\vee q)\wedge(p\to\neg q)$　g)$q\leftrightarrow p$
7. a)$\neg p$　b)$p\wedge\neg q$　c)$p\to q$　d)$\neg p\to\neg q$
   e)$p\to q$　f)$q\wedge\neg p$　g)$q\to p$
8. a)$r\wedge\neg p$　b)$\neg p\wedge q\wedge r$　c)$r\to(q\leftrightarrow\neg p)$　d)$\neg q\wedge\neg p\wedge r$
   e)$(q\to(\neg r\wedge\neg p))\wedge\neg((\neg r\wedge\neg p)\to q)$　f)$(p\wedge r)\to\neg q$
9. a)假　b)真　c)真　d)真
10. a)异或：你只能取一种饮料。
    b)兼或：长密码可以是任意符号组合。
    c)兼或：学过两门课程的学生更符合要求。
    d)每种解释都可能；旅行者可能想同时使用两种货币付款，或者商店不允许这样。
11. a)兼或：如果你学过微积分或计算机科学，或两者都学过，就可以选修离散数学。异或：如果你学过微积分或计算机科学，但并非两者都学过，就可以选修离散数学。这里想表示的很可能是兼或。
    b)兼或：你可以拿折扣，或者你可以获得低息贷款，或者你可以同时拿折扣又获得低息贷款。异或：你可以拿折扣，或者你可以获得低息贷款，但你不能同时拿折扣又获得低息贷款。这里想表示的很可能是异或。
    c)兼或：你可以从A款选两项B款不选；或者从B款选三项A款不选；或者A款选两项B款选三项共五项。异或：你可以从A款选两项，或者从B款选三项，但不能都选。这里想表示的几乎可以肯定是异或。
    d)兼或：积雪2英尺多或风寒指数低于-100，或两者均成立，则学校将停课。异或：积雪2英尺多

或风寒指数低于－100，但并非两者均成立，则学校将停课。这里想表示的显然是兼或。

12. a)如果吹东北风，则就会下雪。
 b)如果温暖能持续一周，则苹果树就会开花。
 c)如果活塞队赢得冠军，则他们打败了湖人队。
 d)如果你登上了朗斯峰顶，则你必定走了 8 英里(1 英里＝1.6 公里)。
 e)如果你闻名世界，则你能得到终身教授职位。
 f)如果你驾车超过 400 英里，则你需要买汽油了。
 g)如果你的保修单有效，则你购买 CD 机必定还不足 90 天。
13. a)你可以买冰激凌卷当且仅当外边很热。
 b)你能赢得比赛当且仅当你拥有唯一的胜券。
 c)你会得到提升当且仅当你的人脉很好。
 d)你的心智会衰减当且仅当你看电视。
 e)火车晚点当且仅当这天我乘坐火车。
14. a)逆命题："我明天去滑雪，仅当今天下雪。"逆否命题："如果我明天不滑雪，则今天一定没有下雪。"否命题："如果今天不下雪，则我明天不滑雪。"
 b)逆命题："如果我今天来上课，就会有测验。"逆否命题："如果我今天不来上课，就不会有测验。"否命题："如果不会有测验，我就不来上课。"
 c)逆命题："如果一个正整数没有 1 和它自身以外的因数，它就是素数。"逆否命题："如果一个正整数有既不是 1 又不是它自己的因数，它不是素数。"否命题："如果一个正整数不是素数，那它有 1 和它自身以外的因数。"
15. a)2 b)16 c)64 d)16
16. a)

p	$\neg p$	$p\wedge\neg p$
T	F	F
F	T	F

b)

p	$\neg p$	$p\vee\neg p$
T	F	T
F	T	T

c)

p	q	$\neg q$	$p\vee\neg q$	$(p\vee\neg q)\to q$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	F

d)

p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$(p\vee q)\to(p\wedge q)$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	T

e)

p	q	$p\to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q\to\neg p$	$(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

f)

p	q	$p\to q$	$q\to p$	$(p\to q)\to(q\to p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

17. 对 a)、b)、c)、d)和 f)有如下真值表。

p	q	$(p \vee q) \to (p \oplus q)$	$(p \oplus q) \to (p \wedge q)$	$(p \vee q) \oplus (p \wedge q)$	$(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow q)$	$(p \oplus q) \to (p \oplus \neg q)$
T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	T	F	T	T

e)的真值表。

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$p \leftrightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow \neg r$	$(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow \neg r)$
T	T	T	F	F	T	T	F
T	T	F	F	T	T	F	T
T	F	T	F	F	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T	F

18.

p	q	$p \to \neg q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \to q) \vee (\neg p \to q)$	$(p \to q) \wedge (\neg p \to q)$	$(p \leftrightarrow q) \vee (\neg p \leftrightarrow q)$	$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	F	T	T

19.

p	q	r	$p \to (\neg q \vee r)$	$\neg p \to (q \to r)$	$(p \to q) \vee (\neg p \to r)$	$(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$	$(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \leftrightarrow r)$	$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T	F
T	F	T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	F
F	F	F	T	T	T	F	T	T

20.

p	q	r	s	$p \leftrightarrow q$	$r \leftrightarrow s$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F
T	T	F	T	T	F	F
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	F	T	F
T	F	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T	F

（续）

p	q	r	s	$p\leftrightarrow q$	$r\leftrightarrow s$	$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(r\leftrightarrow s)$
F	T	T	F	F	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	F	F
F	F	F	F	T	T	T

21. 第一个子句为真当且仅当 p、q 和 r 中至少有一个为真。第二个子句为真当且仅当三个变量中至少有一个为假。所以，整个语句为真当且仅当这些变量中至少有一个 T 和 F，换句话说，它们不能具有相同的真值。

22. a)按位 OR 是 111 1111；按位 AND 是 000 0000；按位 XOR 是 111 1111。
    b)按位 OR 是 1111 1010；按位 AND 是 1010 0000；按位 XOR 是 0101 1010。
    c)按位 OR 是 10 0111 1001；按位 AND 是 00 0100 0000；按位 XOR 是 10 0011 1001。
    d)按位 OR 是 11 1111 1111；按位 AND 是 00 0000 0000；按位 XOR 是 11 1111 1111。

23. 0.2，0.6。

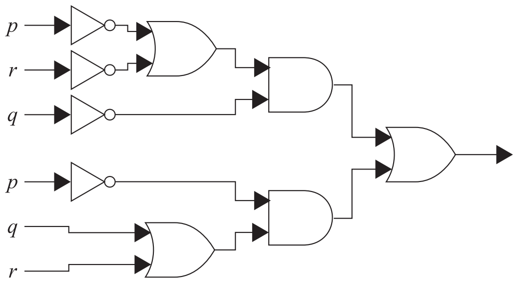
24. 0.8，0.6。

25. a)第 99 条语句为真，其余语句为假。
    b)语句 1 至 50 均为真，语句 51 至 99 均为假。
    c)这不可能发生；这是一个悖论，表明这些不是命题。

1.2 节

1. $e\rightarrow a$
2. $g\rightarrow(r\wedge(\neg m)\wedge(\neg b))$
3. $e\rightarrow(a\wedge(b\vee p)\wedge r)$
4. a)$q\rightarrow p$　　b)$q\wedge\neg p$　　c)$q\rightarrow p$　　d)$\neg q\rightarrow\neg p$
5. 不一致
6. 一致
7. NEW **AND** JERSEY **AND** BEACHES，(JERSEY **AND** BEACHES)**NOT** NEW
8. “如果我问你右边的岔路是否通向遗址，你会回答是吗？”
9. 如果第一位教授不想喝咖啡，则他就知道对女主人的回答是“不”。所以女主人及其余教授知道第一位教授确实想喝咖啡。类似地，第二位教授也一定想喝咖啡。当第三位教授说“不”时，女主人知道第三位教授不想喝咖啡。
10. A 是一个骑士而 B 是一个无赖。
11. A 是一个骑士且 B 是一个骑士。
12. A 是一个无赖而 B 是一个骑士。
13. A 是骑士，B 是间谍，而 C 是无赖。
14. A 是骑士，B 是间谍，而 C 是无赖。
15. 三人中任意一个既可以是骑士，也可以是间谍，也可以是无赖。
16. 无解
17. 薪水按升序排列：Fred，Maggie，Janice
18. 侦探能确定男管家和厨师在撒谎，但是不能确定园丁是否说真话或杂役是否说真话。
19. 日本人养斑马，而挪威人喝矿泉水。
20. 一人诚实，49 人不诚实。
21. a)$\neg(p\wedge(q\vee\neg r))$　　b)$((\neg p)\wedge(\neg q))\vee(p\wedge r)$

22.



1.3 节

1. 等价式可由下列表中相应两列是否一致而得出。

p	$p\wedge \mathbf{T}$	$p\vee \mathbf{F}$	$p\wedge \mathbf{F}$	$p\vee \mathbf{T}$	$p\vee p$	$p\wedge p$
T	T	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F

2. a)

p	q	$p\vee q$	$q\vee p$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

b)

p	q	$p\wedge q$	$q\wedge p$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	F

3.

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge(q\vee r)$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

4. a)Jan 不富裕，或者 Jan 不快乐。
b)Carlos 明天不会骑自行车，而且 Carlos 明天也不会跑步。
c)Mei 不会步行去上课，且 Mei 不会乘坐公共汽车去上课。
d)Ibrahim 不聪明，或者 Ibrahim 不用功。

5. a)

p	q	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

b)

p	q	$p\vee q$	$p\rightarrow(p\vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

c)

p	q	$\neg p$	$p\rightarrow q$	$\neg p\rightarrow(p\rightarrow q)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

d)

p	q	$p\wedge q$	$p\rightarrow q$	$(p\wedge q)\rightarrow(p\rightarrow q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

e)

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg(p \to q) \to p$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

f)

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg q$	$\neg(p \to q) \to \neg q$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	F	T	T

6. 在每种情形下我们要证明如果假设为真，则结论也为真。

a)如果假设 $p \wedge q$ 为真，则由合取的定义，结论 p 必然也为真。

b)如果假设 p 为真，由析取的定义，结论 $p \vee q$ 也为真。

c)如果假设$\neg p$ 为真，即如果 p 为假，则结论 $p \to q$ 为真。

d)如果假设 $p \wedge q$ 为真，则 p 和 q 均为真，所以结论 $p \to q$ 为真。

e)如果假设$\neg(p \to q)$为真，则 $p \to q$ 为假，所以结论 p 为真(同时 q 为假)。

f)如果假设$\neg(p \to q)$为真，则 $p \to q$ 为假，所以 p 为真而 q 为假。因此结论$\neg q$ 为真。

7. 真值表所显示的第四列和第一列完全相同证明了 a)，而第六列和第一列完全相同证明了 b)。

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F

8. 是永真式。

9. 当 p 和 q 具有相反的真值时两者恰好都为真。

10. 命题$\neg p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当$\neg p$ 和 q 有同样的真值，这意味着 p 和 q 具有不同的真值。类似地，在完全相同的情形下 $p \leftrightarrow \neg q$ 为真。所以这两个表达式是逻辑等价的。

11. 命题$\neg(p \leftrightarrow q)$为真当且仅当 $p \leftrightarrow q$ 为假，这意味着 p 和 q 有不同的真值。因为这恰恰就是当$\neg p \leftrightarrow q$ 为真的情形，所以这两个表达式是逻辑等价的。

12. 为了使得$(p \to r) \wedge (q \to r)$为假，两个条件语句之一必为假，这只有当 r 为假且 p 和 q 至少有一个为真时才会发生。但这恰好是 $p \vee q$ 为真且 r 为假，即当$(p \vee q) \to r$ 为假时的情形。因为两个命题恰好在相同情形下为假，所以它们是逻辑等价的。

13. 为了使得$(p \to r) \vee (q \to r)$为假，两个条件语句都必须为假，这只有当 r 为假且 p 和 q 都为真时才会发生。但这恰好是 $p \wedge q$ 为真且 r 为假，即当$(p \wedge q) \to r$ 为假时的情形。因为两个命题恰好在相同情形下为假，所以它们是逻辑等价的。

14. 最初在 1.1 节中定义双条件命题时已看到过该事实。当 p 和 q 具有相同的真值时两者都为真。

15. 真值表最后一列均为 T。

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

16. 这些命题不是逻辑等价的，因为当 p、q 和 r 全为假时，$(p \to q) \to r$ 也为假，但 $p \to (q \to r)$为真。

17. 可以有多个解法。如果令 r 为真，且 p、q 和 s 为假，则$(p \to q) \to (r \to s)$必为假，但$(p \to r) \to (q \to s)$必为真。

18. a) $p \vee \neg q \vee \neg r$　　b) $(p \vee q \vee r) \wedge s$　　c) $(p \wedge \mathbf{T}) \vee (q \wedge \mathbf{F})$
19. 如果取两次对偶，则每个 $\vee$ 先变成 $\wedge$ 又变回 $\vee$，每个 $\wedge$ 先变成 $\vee$ 又变回 $\wedge$，每个 **T** 先变为 **F** 再变回 **T**，每个 **F** 先变为 **T** 再变回 **F**。因此，$(s^*)^* = s$。
20. 令 p 和 q 为只含运算符 $\wedge$、$\vee$ 和 $\neg$，以及 **T** 和 **F** 等价的复合命题。注意 $\neg p$ 和 $\neg q$ 也是等价的。反复利用德·摩根律把否定尽可能地往复合命题内部推进，同时将 $\vee$ 变为 $\wedge$，将 $\wedge$ 变为 $\vee$，将 **T** 变为 **F**，将 **F** 变为 **T**。这样就能证明 $\neg p$ 和 $\neg q$ 与 p^* 和 q^* 是相同的，只是其中的原子命题 p_i 被其否定命题所代替。由此可以得出结论 p^* 和 q^* 也是等价的，因为 $\neg p$ 和 $\neg q$ 是等价的。
21. $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$
22. 给定一个复合命题 p，构造其真值表，然后用析取范式写出一个逻辑等价于 p 的命题 q。因为 q 只涉及 $\neg$、$\wedge$ 和 $\vee$，所以这就证明了这三个运算符构成一个功能完备集。
23. 根据练习 22，给定一个复合命题 p，我们可以写出一个只含 $\neg$、$\wedge$ 和 $\vee$，且与 p 逻辑等价的命题 q。根据德·摩根律，我们可以通过用 $\neg(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n)$ 替换 $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n)$ 的所有出现来消去所有 $\wedge$。
24. 在 p 或 q 或两者均为假时，$\neg(p \wedge q)$ 为真；当 p 和 q 均为真时，$\neg(p \wedge q)$ 为假。因为这就是 $p | q$ 的定义，所以这两个复合命题是逻辑等价的。
25. 当 p 和 q 均为假时 $\neg(p \vee q)$ 为真，否则为假。因为这就是 $p \downarrow q$ 的定义，所以两者是逻辑等价的。
26. $((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$
27. 由真值表或 $p | q$ 的定义可直接得出结论。
28. 16
29. 如果数据库是打开的，则或者系统处于初始状态，或者监控程序置于关闭状态。
30. 全部 9 个。
31. a)可满足的　　b)不可满足的　　c)不可满足的
32. 利用正文中给出的与 9×9 数独谜题相同的命题，只是变量的下标是从 1～4 而不是从 1～9，对 2×2 子格的命题也做类似的修改：$\bigwedge_{r=0}^{1} \bigwedge_{s=0}^{1} \bigwedge_{n=1}^{4} \bigvee_{i=1}^{2} \bigvee_{j=1}^{2} p(2r+i, 2s+j, n)$
33. $\bigvee_{i=1}^{9} p(i, j, n)$ 表明第 j 列包含数 n，所以 $\bigwedge_{n=1}^{9} \bigvee_{i=1}^{9} p(i, j, n)$ 表明第 j 列包含所有 9 个数。所以 $\bigwedge_{j=1}^{9} \bigwedge_{n=1}^{9} \bigvee_{i=1}^{9} p(i, j, n)$ 表明每一列包含所有的数。

1.4 节

1. a)T　　b)T　　c)F
2. a)T　　b)F　　c)F　　d)F
3. a)有一个学生在每个工作日都花 5 个多小时在课堂上。
   b)每个学生在每个工作日都花 5 个多小时在课堂上。
   c)有一个学生并没有在每个工作日花 5 个多小时在课堂上。
   d)没有学生在每个工作日花 5 个多小时在课堂上。
4. a)每个喜剧演员都是很有趣的。
   b)每个人都是有趣的喜剧演员。
   c)存在某个人，如果他是喜剧演员，则他是很有趣的。
   d)某些喜剧演员是很有趣的。
5. a) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$　　b) $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$
   c) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$　　d) $\forall x \neg(P(x) \vee Q(x))$
6. a)T　　b)T　　c)F　　d)F
   e)T　　f)F
7. a)T　　b)T　　c)T　　d)T
8. a)T　　b)F　　c)T　　d)F
9. a) $P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$
   b) $P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$
   c) $\neg P(0) \vee \neg P(1) \vee \neg P(2) \vee \neg P(3) \vee \neg P(4)$
   d) $\neg P(0) \wedge \neg P(1) \wedge \neg P(2) \wedge \neg P(3) \wedge \neg P(4)$

e)$\neg(P(0)\vee P(1)\vee P(2)\vee P(3)\vee P(4))$

f)$\neg(P(0)\wedge P(1)\wedge P(2)\wedge P(3)\wedge P(4))$

10. a)$P(1)\vee P(2)\vee P(3)\vee P(4)\vee P(5)$

b)$P(1)\wedge P(2)\wedge P(3)\wedge P(4)\wedge P(5)$

c)$\neg(P(1)\vee P(2)\vee P(3)\vee P(4)\vee P(5))$

d)$\neg(P(1)\wedge P(2)\wedge P(3)\wedge P(4)\wedge P(5))$

e)$(P(1)\wedge P(2)\wedge P(4)\wedge P(5))\vee(\neg P(1)\vee\neg P(2)\vee\neg P(3)\vee\neg P(4)\vee\neg P(5))$

11. 可以有多个解。

a)你离散数学班上的所有学生；世界上的所有学生。

b)所有美国参议员；所有大学的足球运动员。

c)乔治·W·布什和杰布·布什；美国的所有政客。

d)比尔·克林顿和乔治·布什；美国的所有政客。

12. 令 $C(x)$为命题函数“x 在你的班上”。

a)$\exists xH(x)$和$\exists x(C(x)\wedge H(x))$，其中 $H(x)$是“x 会说印地语”。

b)$\forall xF(x)$和$\forall x(C(x)\rightarrow F(x))$，其中 $F(x)$是“x 很友好”。

c)$\exists x\neg B(x)$和$\exists x(C(x)\wedge\neg B(x))$，其中 $B(x)$是“x 出生在加利福尼亚”。

d)$\exists xM(x)$和$\exists x(C(x)\wedge M(x))$，其中 $M(x)$是“x 曾演过电影”。

e)$\forall x\neg L(x)$和$\forall x(C(x)\rightarrow\neg L(x))$，其中 $L(x)$是“x 上过逻辑编程课程”。

13. 令 $P(x)$为“x 是完美的”；$F(x)$为“x 是你的朋友”；论域为所有人。

a)$\forall x\neg P(x)$

b)$\neg\forall xP(x)$

c)$\forall x(F(x)\rightarrow P(x))$

d)$\exists x(F(x)\wedge P(x))$

e)$\forall x(F(x)\wedge P(x))$ or $(\forall xF(x))\wedge(\forall xP(x))$

f)$(\neg\forall xF(x))\vee(\exists x\neg P(x))$

14. 令 $Y(x)$为命题函数，x 是在你的学校或你的班上的。

a)如果我们令 $V(x)$为“x 曾在越南居住”，则如果论域只是你学校同学时我们有$\exists xV(x)$，或者如果论域是所有人时有$\exists x(Y(x)\wedge V(x))$。如果令 $D(x, y)$表示某人 x 曾在国家 y 居住，则可以将最后一个重写为$\exists x(Y(x)\wedge D(x,$ 越南$))$。

b)如果令 $H(x)$为“x 会说印地语”，则如果论域是你学校同学时我们有$\exists x\neg H(x)$，或者如果论域是所有人时有$\exists x(Y(x)\wedge\neg H(x))$。如果令 $S(x, y)$表示某人 x 会说语言 y，则可以将最后一个重写为$\exists x(Y(x)\wedge\neg S(x,$ 印地语$))$。

c)如果令 $J(x)$、$P(x)$和 $C(x)$分别为表示 x 会 Java、Prolog 和 C++的命题函数，则如果论域是你学校同学时有$\exists x(J(x)\wedge P(x)\wedge C(x))$，或者如果论域是所有人时有$\exists x(Y(x)\wedge J(x)\wedge P(x)\wedge C(x))$。如果令 $K(x, y)$表示某人 x 会用编程语言 y，则可以将最后一个重写为$\exists x(Y(x)\wedge K(x,$ Java$)\wedge K(x,$ Prolog$)\wedge K(x,$ C++$))$。

d)如果令 $T(x)$为“x 喜欢泰国食物”，则如果论域是你学校同学时我们有$\forall xT(x)$，或者如果论域是所有人时有$\forall x(Y(x)\rightarrow T(x))$。如果令 $E(x, y)$表示某人 x 喜欢类型 y 的食物，则可以将最后一个重写为$\forall x(Y(x)\rightarrow E(x,$ 泰国$))$。

e)如果令 $H(x)$为“x 打曲棍球”，则如果论域是你学校同学时我们有$\exists x\neg H(x)$，或者如果论域是所有人时有$\exists x(Y(x)\wedge\neg H(x))$。如果令 $P(x, y)$表示某人 x 玩游戏 y，则可以将最后一个重写为$\exists x(Y(x)\wedge\neg P(x,$ 曲棍球$))$。

15. 令 $T(x)$表示 x 是永真式，$C(x)$表示 x 是矛盾式。

a)$\exists xT(x)$

b)$\forall x(C(x)\rightarrow T(\neg x))$

c)$\exists x\exists y(\neg T(x)\wedge\neg C(x)\wedge\neg T(y)\wedge\neg C(y)\wedge T(x\vee y))$

d)$\forall x\forall y((T(x)\wedge T(y))\rightarrow T(x\wedge y))$

16. a)$Q(0, 0, 0)\wedge Q(0, 1, 0)$

b) $Q(0, 1, 1) \vee Q(1, 1, 1) \vee Q(2, 1, 1)$

c) $\neg Q(0, 0, 0) \vee \neg Q(0, 0, 1)$

d) $\neg Q(0, 0, 1) \vee \neg Q(1, 0, 1) \vee \neg Q(2, 0, 1)$

17. a)令谓词 $T(x)$ 表示 x 学习新技巧，并令论域为年长的狗。原命题是 $\exists x T(x)$。否定是 $\forall x \neg T(x)$："没有年长的狗学习新技巧。"

b)令谓词 $C(x)$ 表示 x 会微积分，并令论域是兔子。原命题是 $\neg\exists x C(x)$。否定是 $\exists x C(x)$："有一只兔子会微积分。"

c)令谓词 $F(x)$ 表示 x 会飞，并令论域为鸟。原命题是 $\forall x F(x)$。否定是 $\exists x \neg F(x)$："有一种鸟不会飞。"

d)令谓词 $T(x)$ 表示 x 会说话，并令论域为狗。原命题是 $\neg\exists x T(x)$。否定是 $\exists x T(x)$："有一只狗会说话。"

e)令谓词 $F(x)$ 和 $R(x)$ 分别表示 x 会法语和俄语，并令论域为这个班上的人。原命题是 $\neg\exists x(F(x) \wedge R(x))$。否定是 $\exists x(F(x) \wedge R(x))$："班上有人会法语和俄语。"

18. a)不存在反例　　b) $x=0$　　c) $x=2$

19. a) $\forall x((F(x, 25\,000) \vee S(x, 25)) \to E(x))$，其中 $E(x)$ 是"某人 x 在指定年份中是贵宾乘客"，$F(x, y)$ 是"x 在指定年份飞行里程超过 y 英里"，$S(x, y)$ 是"x 在指定年份乘坐航班次数超过 y 次"。

b) $\forall x(((M(x) \wedge T(x, 3)) \vee (\neg M(x) \wedge T(x, 3.5))) \to Q(x))$，其中 $Q(x)$ 是"某人 x 有资格参加本次马拉松"，$M(x)$ 是"x 是男性"，$T(x, y)$ 是"x 跑马拉松的时间不超过 y 小时"。

c) $M \to ((H(60) \vee (H(45) \wedge T)) \wedge \forall y、G(B, y))$，其中 M 是命题"学生取得硕士学位"，$H(x)$ 是"学生至少修过 x 个学分"，T 是命题"学生撰写了硕士论文"，$G(x, y)$ 是"学生在课程 y 上的成绩为 x 或更高"。

d) $\exists x((T(x, 21) \wedge G(x, 4.0))$，其中 $T(x, y)$ 是"某人 x 修了多于 y 个学分"，$G(x, p)$ 是"x 获得了平均绩点 p"。

20. a)如果某台打印机不能提供服务且很忙，则有一些作业丢失了。

b)如果每台打印机都很忙，则有作业在队列中。

c)如果有作业在队列中且丢失了，则有一些打印机不能提供服务。

d)如果每台打印机都很忙且每个作业都在队列中，则有一些作业丢失了。

21. a) $(\exists x F(x, 10)) \to \exists x S(x)$，其中 $F(x, y)$ 是"磁盘 x 有多于 y 兆字节的空闲空间"，$S(x)$ 是"邮件消息 x 可以被保存"。

b) $(\exists x A(x)) \to \forall x(Q(x) \to T(x))$，其中 $A(x)$ 是"报警 x 是主动的"，$Q(x)$ 是"消息 x 进入队列"，$T(x)$ 是"消息 x 被传送出去"。

c) $\forall x((x \neq \text{主控制台}) \to T(x))$，其中 $T(x)$ 是"诊断监控器跟踪系统 x 的状态"。

d) $\forall x(\neg L(x) \to B(x))$，其中 $L(x)$ 是"电话会议的主叫方将参与者 x 放到特殊列表中"，$B(x)$ 是"参与者 x 要支付费用"。

22. 不等价。令 $P(x)$ 是有时为真有时为假的命题函数，$Q(x)$ 是总是为假的命题函数。则 $\forall x(P(x) \to Q(x))$ 为假，但是 $\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$ 为真。

23. 当论域中至少有一个 x 值使得 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 中至少有一个为真时，这两条语句为真。

24. a)如果 A 为真，两边都逻辑等价于 $\forall x P(x)$。如果 A 为假，左边显然为假。此外，对每个 x，$P(x) \wedge A$ 为假，所以右边为假。因此，两边是逻辑等价的。

b)如果 A 为真，两边均逻辑等价于 $\exists x P(x)$。如果 A 为假，左边显然为假。此外，对每个 x，$P(x) \wedge A$ 为假。所以 $\exists x(P(x) \wedge A)$ 为假。因此，两边是逻辑等价的。

25. 可以通过证明一边为真当且仅当另一边也为真来确定这些等价式。

a)假设 A 为真。则对于所有的 x，$P(x) \to A$ 也为真，所以在这种情形下左边总是为真。通过类似的推理，此时等式的右边也总是为真。另一方面，假设 A 为假。有两个子情形。如果对每个 x 都有 $P(x)$ 为假，则 $P(x) \to A$ 是一种无须证明的真，因此左边也是无需证明的真。同样的推理可以证明右边也为真，原因是在这个子情形下 $\exists x P(x)$ 为真。对于第二种子情形，假设有某个 x 使得 $P(x)$ 为真。则对于该 x，$P(x) \to A$ 为假，所以左边是假的。右边也是假的，因为在这个子情形下 $\exists x P(x)$ 为真但 A 为假。这样，在所有的情形下，这两个命题具有相同的真值。

b)如果 A 为真，则两边都自然为真，因为条件语句的结论为真。如果 A 为假，则有两个子情形。如果对于某个 x 有 $P(x)$ 为假，则对于那个 x 有 $P(x)\to A$ 为无需证明的真，因此左边为真。同样的推理可得右边也为真，因为在这个子情形下 $\forall xP(x)$ 为假。对于第二个子情形，假设对于每个 x 都有 $P(x)$ 为真。则对于每个 x 有 $P(x)\to A$ 为假。因此左边为假(不存在 x 使得条件语句为真)。右边也为假，因为这是具有一个真假设和一个假结论的条件语句。因此在所有的情形下，这两个命题具有相同的真值。

26. 为证明这些不是逻辑等价的，令 $P(x)$ 为语句“x 是正的”，$Q(x)$ 为语句“x 是负的”，而论域为整数集合。于是 $\exists xP(x)\land\exists xQ(x)$ 为真，但 $\exists x(P(x)\land Q(x))$ 为假。

27. a)真
b)假，除非论域只含一个元素
c)真

28. a)是　　b)否　　c)juana，kiko
d)math273，cs301　　e)juana，kiko

29. `sibling(X, Y): - mother(M, X), mother(M, Y), father(F, X), father(F, Y)`

30. a) $\forall x(P(x)\to\neg Q(x))$
b) $\forall x(Q(x)\to R(x))$
c) $\forall x(P(x)\to\neg R(x))$
d)不能得出结论。可能会有爱虚荣的教授，因为前提并没有排除无知者以外还有其他爱虚荣的人。

31. a) $\forall x(P(x)\to\neg Q(x))$
b) $\forall x(R(x)\to\neg S(x))$
c) $\forall x(\neg Q(x)\to S(x))$
d) $\forall x(P(x)\to\neg R(x))$
e)可以得出结论。假设 x 是一个婴儿。则由第一个前提，x 的行为不符合逻辑，因此由第三个前提，x 被人轻视。第二个前提是说如果 x 能管理鳄鱼，则 x 就不会被人轻视。因此，x 不能管理鳄鱼。

1.5 节

1. a)对每个实数 x，存在实数 y 使得 x 小于 y。
b)对每个实数 x 和实数 y，如果 x 和 y 都是非负的，则它们的乘积是非负的。
c)对每个实数 x 和实数 y，存在实数 z 使得 $xy=z$。

2. a)班上的某个学生已经给班上的另一个学生发送了消息。
b)班上某个学生已经给班上的每个学生都发送了消息。
c)班上每个学生已经给班上的至少一个学生发送了消息。
d)班上有个学生已经接收到班上的每个学生发来的消息。
e)班上每个学生已经接收到班上至少一个学生发来的消息。
f)班上每个学生已经给班上每个学生都发送了消息。

3. a)Sarah Smith 已经访问过 www.att.com。
b)至少有一个人已经访问过 www.imdb.org。
c)Jose Orez 已经访问了至少一个网站。
d)有一个网站 Ashok Puri 和 Cindy Yoon 都访问过了。
e)除了 David Belcher 以外，还有一个人访问过 David Belcher 已经访问过的所有网站。
f)有两个不同的人已经访问过恰好相同的网站。

4. a)Abdallah Hussein 不喜欢日本菜。
b)学校的某些学生喜欢韩国菜，并且学校的每个人都喜欢墨西哥菜。
c)有一些菜肴不是 Monique Arsenault 喜欢就是 Jay Johnson 喜欢。
d)学校中每一对不同的学生，总有一种菜肴他们中有人不喜欢。
e)学校中有两个学生恰恰喜欢相同的一组菜肴。
f)学校中每对学生，总有一种菜肴他们会有相同的看法(或者都喜欢，或者都不喜欢)。

5. a) $\forall xL(x, \text{Jerry})$ b) $\forall x\exists yL(x, y)$ c) $\exists y\forall xL(x, y)$
   d) $\forall x\exists y\neg L(x, y)$ e) $\exists x\neg L(\text{Lydia}, x)$ f) $\exists x\forall y\neg L(y, x)$
   g) $\exists x(\forall yL(y, x)\wedge\forall z((\forall wL(w, z))\rightarrow z=x))$
   h) $\exists x\exists y(x\neq y\wedge L(\text{Lynn}, x)\wedge L(\text{Lynn}, y)\wedge\forall z(L(\text{Lynn}, z)\rightarrow(z=x\vee z=y)))$
   i) $\forall xL(x, x)$ j) $\exists x\forall y(L(x, y)\leftrightarrow x=y)$
6. a) $A(\text{Lois}, \text{Michaels 教授})$
   b) $\forall x(S(x)\rightarrow A(x, \text{Gross 教授}))$
   c) $\forall x(F(x)\rightarrow(A(x, \text{Miller 教授})\vee A(\text{Miller 教授}, x)))$
   d) $\exists x(S(x)\wedge\forall y(F(y)\rightarrow\neg A(x, y)))$
   e) $\exists x(F(x)\wedge\forall y(S(y)\rightarrow\neg A(y, x)))$
   f) $\forall y(F(y)\rightarrow\exists x(S(x)\vee A(x, y)))$
   g) $\exists x(F(x)\wedge\forall y((F(y)\wedge(y\neq x))\rightarrow A(x, y)))$
   h) $\exists x(S(x)\wedge\forall y(F(y)\rightarrow\neg A(y, x)))$
7. a) $\neg M(\text{Chou}, \text{Koko})$
   b) $\neg M(\text{Arlene}, \text{Sarah})\wedge\neg T(\text{Arlene}, \text{Sarah})$
   c) $\neg M(\text{Deborah}, \text{Jose})$
   d) $\forall xM(x, \text{Ken})$
   e) $\forall x\neg T(x, \text{Nina})$
   f) $\forall x(T-x, \text{Avi})\vee M(x, \text{Avi}))$
   g) $\exists x\forall y(y\neq x\rightarrow M(x, y))$
   h) $\exists x\forall y(y\neq x\rightarrow(M(x, y)\vee T(x, y)))$
   i) $\exists x\exists y(x\neq y\wedge M(x, y)\wedge M(y, x))$
   j) $\exists xM(x, x)$
   k) $\exists x\forall y(x\neq y\rightarrow(\neg M(x, y)\wedge\neg T(y, x)))$
   l) $\forall x(\exists y(x\neq y\wedge(M(y, x)\vee T(y, x))))$
   m) $\exists x\exists y(x\neq y\wedge M(x, y)\wedge T(y, x))$
   n) $\exists x\exists y(x\neq y\wedge\forall z((z\neq x\wedge z\neq y)\rightarrow(M(x, z)\vee M(y, z)\vee T(x, z)\vee T(y, z))))$
8. a) $\forall xP(x)$，其中 $P(x)$为“x 需要学一门离散数学课程”，论域由所有计算机科学学生组成。
   b) $\exists xP(x)$，其中 $P(x)$为“x 拥有台个人计算机”，论域由班上所有学生组成。
   c) $\forall x\exists yP(x, y)$，其中 $P(x, y)$为“x 选修 y”，x 的论域由班上所有学生组成，y 的论域由计算机科学课程组成。
   d) $\exists x\exists yP(x, y)$，其中 $P(x, y)$和论域与 c)中相同。
   e) $\forall x\forall yP(x, y)$，其中 $P(x, y)$为“x 去过 y”，x 的论域由班上所有学生组成，y 的论域由校园内所有楼房组成。
   f) $\exists x\exists y\forall z(P(z, y)\rightarrow Q(x, z))$，其中 $P(z, y)$为“z 在 y 中”，$Q(x, z)$为“x 去过 z”，其中 x 的论域由班上所有学生组成，y 的论域由校园内所有楼房组成，而 z 的论域由所有房间组成。
   g) $\forall x\forall y\exists z(P(z, y)\wedge Q(x, z))$，其中谓词和论域与 f 中相同)。
9. a) $\forall u\exists m(A(u, m)\wedge\forall n(n\neq m\rightarrow\neg A(u, n)))$，其中 $A(u, m)$是指用户 u 已经访问过邮箱 m。
   b) $\exists p\forall e(H(e)\wedge S(p, \text{运行}))\rightarrow S(\text{内核}, \text{运行正确})$，其中 $H(e)$是指错误条件 e 有效，$S(x, y)$是指 x 的状态是 y。
   c) $\forall u\forall s(E(s, .\text{edu})\rightarrow A(u, s))$，其中 $E(s, x)$是指站点 s 有扩展 x，$A(u, s)$是指用户 u 可访问站点 s。
   d) $\exists x\exists y(x\neq y\wedge\forall z((\forall sM(z, s))\leftrightarrow(z=x\vee z=y)))$，其中 $M(a, b)$是指系统 a 监控远程服务器 b。
10. a) $\forall x\forall y((x<0)\wedge(y<0)\rightarrow(x+y<0))$
    b) $\neg\forall x\forall y((x>0)\wedge(y>0)\rightarrow(x-y>0))$
    c) $\forall x\forall y(x^2+y^2\geqslant(x+y)^2)$
    d) $\forall x\forall y(|xy|=|x||y|)$

11. $\forall x\exists a\exists b\exists c\exists d((x>0)\rightarrow x=a^2+b^2+c^2+d^2)$，其中论域是全体整数。

12. a) $\forall x\forall y((x<0)\wedge(y<0)\rightarrow(xy>0))$

    b) $\forall x(x-x=0)$

    c) $\forall x\exists a\exists b(a\neq b\wedge\forall c(c^2=x\leftrightarrow(c=a\vee c=\mathrm{b})))$

    d) $\forall x((x<0)\rightarrow\neg\exists y(x=y^2))$

13. a)实数具有乘法单位元。

    b)两个负实数的积总是一个正实数。

    c)存在实数 x 和 y 使得 x^2 大于 y 而 x 小于 y。

    d)实数在加法运算下是封闭的。

14. a)真　b)真　c)真　d)真　e)真

    f)假　g)假　h)真　i)假

15. a) $P(1,1)\wedge P(1,2)\wedge P(1,3)\wedge P(2,1)\wedge P(2,2)\wedge P(2,3)\wedge P(3,1)\wedge P(3,2)\wedge P(3,3)$

    b) $P(1,1)\vee P(1,2)\vee P(1,3)\vee P(2,1)\vee P(2,2)\vee P(2,3)\vee P(3,1)\vee P(3,2)\vee P(3,3)$

    c) $(P(1,1)\wedge P(1,2)\wedge P(1,3))\vee(P(2,1)\wedge P(2,2)\wedge P(2,3))\vee(P(3,1)\wedge P(3,2)\wedge P(3,3))$

    d) $(P(1,1)\vee P(2,1)\vee P(3,1))\wedge(P(1,2)\vee P(2,2)\vee P(3,2))\wedge(P(1,3)\vee P(2,3)\vee P(3,3))$

16. a) $\exists x\forall y\exists z\neg T(x,y,z)$

    b) $\exists x\forall y\neg P(x,y)\wedge\exists x\forall y\neg Q(x,y)$

    c) $\exists x\forall y(\neg P(x,y)\vee\forall z\neg R(x,y,z))$

    d) $\exists x\forall y(P(x,y)\wedge\neg Q(x,y))$

17. a) $\exists x\exists y\neg P(x,y)$

    b) $\exists y\forall x\neg P(x,y)$

    c) $\exists y\exists x(\neg P(x,y)\wedge\neg Q(x,y))$

    d) $(\forall x\forall yP(x,y))\vee(\exists x\exists y\neg Q(x,y))$

    e) $\exists x(\forall y\exists z\neg P(x,y,z)\vee\forall z\exists y\neg P(x,y,z))$

18. 任何一个具有 4 个或更多成员的论域都会使命题为真；具有 3 个或更少成员的论域都会使命题为假。

19. a)班上有这样一个同学使得对于任何两门不同的数学课程，该同学都不会恰好只选修了这两门课程。

    b)每个人要么已访问过利比亚，要么没有除访问过利比亚以外的某个国家。

    c)有人已攀登过喜马拉雅山的每座山峰。

    d)有人既没和 Kevin Bacon 出演同一部电影，也没和任何与 Kevin Bacon 出演过电影的人出演同一部电影。

20. a) $x=2,\ y=-2$　b) $x=-4$　c) $x=17,\ y=-1$

21. $\forall x\forall y\forall z((x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z))$

22. $\forall m\forall b(m\neq 0\rightarrow\exists x(mx+b=0\wedge\forall w(mw+b=0\rightarrow w=x)))$

23. a)真　b)假　c)真

24. $\neg(\exists x\forall yP(x,y))\leftrightarrow\forall x(\neg\forall yP(x,y))\leftrightarrow\forall x\exists y\neg P(x,y)$

25. a)假定 $\forall xP(x)\wedge\exists xQ(x)$ 为真。则对所有 x 有 $P(x)$ 为真，并且有一个元素 y 使 $Q(y)$ 为真。因为 $P(x)\wedge Q(y)$ 对所有 x 为真，并且有 y 使 $Q(y)$ 为真，所以 $\forall x\exists y(P(x)\wedge Q(y))$ 为真。反之，假定第二个命题为真。令 x 为论域中的一个元素。存在一个 y 使 $Q(y)$ 为真，所以 $\exists xQ(x)$ 为真。因为 $\forall xP(x)$ 也为真，可得出第一个命题也为真。

    b)假定 $\forall xP(x)\vee\exists xQ(x)$ 为真。则或者所有 x 有 $P(x)$ 为真，或者有 y 使得 $Q(y)$ 为真。在第一种情形下，$P(x)\vee Q(y)$ 对所有 x 为真，所以 $\forall x\exists y(P(x)\vee Q(y))$ 为真。在第二种情形下，对特定的 y 使 $Q(y)$ 为真，所以 $P(x)\vee Q(y)$ 对所有 x 为真，从而 $\forall x\exists y(P(x)\vee Q(y))$ 为真。反之，假定第二个命题为真。如果 $P(x)$ 对所有 x 为真，则第一个命题为真。如果不是，则 $P(x)$ 对某个 x 为假，对该 x 必存在一 y 使 $P(x)\vee Q(y)$ 为真。所以 $Q(y)$ 必为真，于是 $\exists yQ(y)$ 为真。这就得出第一个命题必须为真。

26. 我们将要说明如何将表达式转换为前束范式，如果其子表达式可转换为前束范式(PNF)。则任何一个表达式都可以从里到外转换为前束范式。(要使论证形式化，就需要使用结构归纳法。)由 1.4 节的练习 23 可知，可以假定命题中只使用逻辑联结符 $\vee$ 和 $\neg$。注意不带量词的命题本身就是前束范式形

式。(这是论证的基本情形。)现在假定命题形如 $QxP(x)$，其中 Q 为量词。因为 $P(x)$ 是比原命题短的表达式，所以可以将它转换为 PNF。Qx 后面跟上这 PNF 仍然是一个 PNF，且等价于原命题。其次，假定命题形如 $\neg P$。如果 P 已经是 PNF 形式，则我们可以用 1.4 节表 2 的等价式把否定符号穿过所有量词。最后，假定命题形如 $P \vee Q$，其中 P 和 Q 均为 PNF。如果 P 和 Q 中只有一个含量词，则可以把量词移到它们两个的前面。如果 P 和 Q 均含量词，可以用 1.4 节练习 23 或本节练习 25(b)重写 $P \vee Q$ 使两个量词都出现在形如 $R \vee S$ 的析取命题之前，然后再把 $R \vee S$ 转换为 PNF。

1.6 节

1. 假言推理；有效的；由于假设为真，所以结论为真。
2. a)附加律　b)化简律　c)假言推理　d)拒取式　e)假言三段论
3. 设 w 是"兰迪努力工作"，设 d 是"兰迪是个笨小子"，设 j 是"兰迪将得到这份工作"。前提是 w、$w \to d$ 和 $d \to \neg j$。用假言推理和前两个前提推出 d。用假言推理和最后一个前提推出 $\neg j$，这就是希望得出的结论："兰迪将不会到这份工作"。
4. 用全称量词实例化得出"如果苏格拉底是人，则苏格拉底是要死的"。再用假言推理得出苏格拉底是要死的。
5. a)有效结论是"我周二没有休假"，"我周四休假了"，"周四下雨了"。
   b)"我没有吃过辣的食物并且没有打雷"是有效结论。
   c)"我是聪明的"是有效结论。
   d)"Ralph 不是主修计算机科学的学生"是有效结论。
   e)"你购买许多东西对美国有利而且对你有利"是有效结论。
   f)"老鼠啃咬它们的食物"和"兔子不是鼠类"是有效结论。
6. 假设 p_1，p_2，…，p_n 为真。想要证明 $q \to r$ 为真。如果 q 为假，就无须证明即可得出结论。否则 q 为真，则由给定论证形式的有效性(当 p_1，p_2，…，p_n，q 为真，r 必为真)可知，r 为真。
7. a)设 $c(x)$ 是"x 是在这个班里"，$j(x)$ 是"x 知道如何写 Java 程序"，$h(x)$ 是"x 可以找到高薪工作"。前提是 $c(\text{Doug})$、$j(\text{Doug})$、$\forall x(j(x) \to h(x))$。用全称量词实例化和最后一个前提得出，$j(\text{Doug}) \to h(\text{Doug})$。对这个结论和第二个前提用假言推理得出 $h(\text{Doug})$。用合取律和第一个前提得出 $c(\text{Doug}) \wedge h(\text{Doug})$。最后，用存在量词引入得出所需要结论 $\exists x(c(x) \wedge h(x))$。
   b)设 $c(x)$ 是"x 在这个班里"，$w(x)$ 是"x 喜欢观察鲸鱼"，$p(x)$ 是"x 关心海洋污染"。前提是 $\exists x(c(x) \wedge w(x))$ 和 $\forall x(w(x) \to p(x))$。根据第一个前提，对一个具体的人 y 来说有 $c(y) \wedge w(y)$。化简律得出 $w(y)$。用第二个前提和全称量词实例化得出 $w(y) \to p(y)$。用假言推理得出 $p(y)$，再用合取律得出 $c(y) \wedge p(y)$。最后，用存在量词引入得出所需要结论 $\exists x(c(x) \wedge p(x))$。
   c)设 $c(x)$ 是"x 在这个班里"，$p(x)$ 是"x 拥有一台个人计算机"，$w(x)$ 是"x 会使用字处理程序"。前提是 $c(\text{Zeke})$、$\forall x(c(x) \to p(x))$ 和 $\forall x(p(x) \to w(x))$。用第二个前提和全称量词实例化得出 $c(\text{Zeke}) \to p(\text{Zeke})$。用第一个前提和假言推理得出 $p(\text{Zeke})$。用第三个前提和全称量词实例化得出 $p(\text{Zeke}) \to w(\text{Zeke})$。最后，用假言推理得出所需要结论 $w(\text{Zeke})$。
   d)设 $j(x)$ 是"x 在新泽西"，$f(x)$ 是"x 住在距离大海 50 英里之内"，$s(x)$ 是"x 见过大海"。前提是 $\forall x(j(x) \to f(x))$ 和 $\exists x(j(x) \wedge \neg s(x))$。第二个前提和存在量词实例化意味着对一个具体的人 y 来说有 $j(y) \wedge \neg s(y)$。化简律得出对这个人 y 来说有 $j(y)$。用全称量词实例化和第一个前提得出 $j(y) \to f(y)$，再用假言推理得出 $f(y)$。用化简律从 $j(y) \wedge \neg s(y)$ 得出 $\neg s(y)$。所以用合取律得出 $f(y) \wedge \neg s(y)$。最后，用存在量词引入得出所需要结论 $\exists x(f(x) \wedge \neg s(x))$。
8. a)正确，使用全称量词实例化和假言推理
   b)无效，肯定结论的谬误
   c)无效，否定假设的谬误
   d)正确，使用全称量词实例化和假言推理
9. 我们知道存在某个 x 使得 $H(x)$ 为真，但不能得出结论 Lola 就是这样的 x。
10. a)肯定结论的谬误。　b)窃取论题的谬论。
    c)使用假言推理的有效论证。　d)否定假设的谬误。

11. 由第二个前提可知，有些狮子不喝咖啡。令 Leo 是动物，由简化律可知 Leo 是一只狮子。通过假言推理由第一个前提可知 Leo 是凶猛的。因此，Leo 是凶猛的并且不喝咖啡。由存在量词的定义，存在不喝咖啡的凶猛动物，也就是说，某种凶猛的动物不喝咖啡。
12. 错误出现在第 5)步，原因是我们这里不能假设使得 P 为真的 c 和使得 Q 为真的 c 是同一个。
13. 给定前提 $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$ 和 $\neg Q(a)$。我们要证明 $\neg P(a)$。用反证法假设 $\neg P(a)$ 为假。则 $P(a)$ 为真。因此，由全称假言推理可得 $Q(a)$。但这与给定的前提 $\neg Q(a)$ 相矛盾。因此我们的假定一定是错误的，所以所期望的 $\neg P(a)$ 是真的。
14.

步骤	理由
1. $\forall x(P(x)\wedge R(x))$	前提引入
2. $P(a)\wedge R(a)$	全称实例，由(1)
3. $P(a)$	化简律，由(2)
4. $\forall x(P(x)\rightarrow(Q(x)\wedge S(x)))$	前提引入
5. $Q(a)\wedge S(a)$	全称假言推理，由(3)和(4)
6. $S(a)$	化简，由(5)
7. $R(a)$	化简，由(2)
8. $R(a)\wedge S(a)$	合取，由(7)和(6)
9. $\forall x(R(x)\wedge S(x))$	全称引入，由(5)

15.

步骤	理由
1. $\exists x\neg P(x)$	前提引入
2. $\neg P(c)$	存在实例，由(1)
3. $\forall x(P(x)\vee Q(x))$	前提引入
4. $P(c)\vee Q(c)$	全称实例，由(3)
5. $Q(c)$	析取三段论，由(4)和(2)
6. $\forall x(\neg Q(x)\vee S(x))$	前提引入
7. $\neg Q(c)\vee S(c)$	全称实例，由(6)
8. $S(c)$	析取三段论，由(5)和(7)
9. $\forall x(R(x)\rightarrow\neg S(x))$	前提引入
10. $R(c)\rightarrow\neg S(c)$	全称实例，由(9)
11. $\neg R(c)$	假言推理，由(8)和(10)
12. $\exists x\neg R(x)$	存在引入，由(11)

16. 令 p 为“天下雨了”；令 q 为“Yvette 带雨伞了”；令 r 为“Yvette 被淋湿了”。三个前提分别是 $\neg p\vee q$、$\neg q\vee\neg r$ 和 $p\vee\neg r$。对前两个应用消解律得出 $\neg p\vee\neg r$。将此式与第三前提应用消解律得出 $\neg r$，得证。
17. 假设这个命题是可满足的。对前两个子句使用消解律可得出 $q\vee q$，换句话说，q 必须为真。对后两个子句运用消解可得 $\neg q\vee\neg q$，换句话说，$\neg q$ 必须为真。这是矛盾的。所以这个命题不是可满足的。
18. 有效。

1.7 节

1. 令 $n=2k+1$，$m=2l+1$ 都是奇数。则 $n+m=2(k+l+1)$ 是偶数。
2. 假设 n 是偶数。则对于某个整数 k 有 $n=2k$。因此有 $n^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2)$。由于可以把 n^2 表示为 2 乘以一个整数，所以得出结论 n^2 是偶数。
3. 直接证明法：假设 $m+n$ 和 $n+p$ 都为偶数。则一定有整数 s 和 t 使得 $m+n=2s$ 和 $n+p=2t$。如果把以上两式相加，得到 $m+2n+p=2s+2t$。等式两边同时减去 $2n$ 并提取公因子，得到 $m+p=2s+2t-2n=2(s+t-n)$。由于 $m+p$ 可以表示成 2 乘以一个整数，所以可得 $m+p$ 是偶数。
4. 因为 n 为奇数，所以可以写成 $n=2k+1$，k 为整数。则 $(k+1)^2-k^2=k^2+2k+1-k^2=2k+1=n$。
5. 假设 r 是有理数，i 是无理数，并且 $s=r+i$ 是有理数。由例 7，$s+(-r)=i$ 是有理数，这是矛盾的。
6. 由于 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$ 是有理数，而 $\sqrt{2}$ 是无理数，所以可得两个无理数的乘积并不一定是无理数。
7. 反证法：如果 $1/x$ 是有理数，则由定义可知 $1/x=p/q$，p 和 q 为整数，且 $q\neq0$。由于 $1/x$ 不能为 0

（如果为 0，则等式两边乘以 x 得 $1=x\cdot 0$，矛盾。），可知 $p\neq 0$。由代数及算术运算法则可得 $x=1/(1/x)=1/(p/q)=q/p$。因此，x 可写为两个整数的商，且分母非 0。由定义可得 x 是有理数。

8. 假设 $x\geqslant 1$ 或 $y\geqslant 1$ 不正确。则 $x<1$ 并且 $y<1$。把这两个不等式相加，可得 $x+y<2$，这正好是 $x+y\geqslant 2$ 的否定。

9. a)假设 n 为奇数，则对于某个整数 k 有 $n=2k+1$。则 $n^3+5=2(4k^3+6k^2+3k+3)$。因为 n^3+5 是 2 乘以某个整数，所以为偶数。

   b)假设 n^3+5 为奇数，并且 n 为奇数。因为 n 为奇数且两个奇数之积也为奇数，所以 n^2 和 n^3 都为奇数。但是 $5=(n^3+5)-n^3$ 是两个奇数的差就应该为偶数。所以 n^3+5 和 n 都为奇数的假设错误。

10. 命题正确，因为 0 不是一个正整数。空证明。

11. $P(1)$是正确的，因为$(a+b)^1=a+b\geqslant a^1+b^1=a+b$。直接证明法。

12. 如果在一个星期的每一天选择 9 或者更少的天数，则累计至多 $9\times 7=63$ 天。但是我们选择了 64 天。这个矛盾表明我们选择的至少有 10 天是在同一个星期几。

13. 矛盾证明法：假设 a/b 是一个有理根，a 和 b 都是整数并且这个分数是最简的(即 a 和 b 没有大于 1 的最大公约数)。把这个根代入方程得到 $a^3/b^3+a/b+1=0$。方程两边同时乘以 b^3 得到 $a^3+ab^2+b^3=0$。如果 a 和 b 都是奇数，则方程式的左边就是 3 个奇数的和，结果也必为奇数。如果 a 是奇数、b 为偶数，则方程式的左边就是奇数＋偶数＋偶数，结果也为奇数。类似地，如果 a 是偶数、b 是奇数，则方程式的左边就是偶数＋偶数＋奇数，结果也为奇数。因为分数 a/b 是最简的，所以 a 和 b 不可能同为偶数。因此在所有的情形下，方程式的左边都为奇数，所以不可能为 0。这一矛盾表明这样的根是不存在的。

14. 首先，假设 n 是奇数，因此对于某个整数 k 有 $n=2k+1$。则 $5n+6=5(2k+1)+6=10k+11=2(5k+5)+1$。因此可得 $5n+6$ 为奇数。为了证明反命题，假设 n 为偶数，对于某个整数 k 有 $n=2k$。则 $5n+6=10k+6=2(5k+3)$，所以 $5n+6$ 为偶数。因此 n 为奇数当且仅当 $5n+6$ 是奇数。

15. 这个命题为真。假设 m 既不是 1 也不是 -1。则 mn 有一个大于 1 的因子 m。另一方面，由于 $mn=1$，所以 1 没有这个因子。因此，$m=1$ 或者 $m=-1$。在第一种情形中 $n=1$，而在第二种情形中 $n=-1$，因为 $n=1/m$。

16. 我们要证明所有等于 x 的数都为偶数。如果 x 为偶数，则对于某个整数 k 有 $x=2k$。所以 $3x+2=3\cdot 2k+2=6k+2=2(3k+1)$，这是偶数，因为它可以写成 $2t$ 的形式，其中 $t=3k+1$。类似地，$x+5=2k+5=2k+4+1=2(k+2)+1$，因此 $x+5$ 是奇数。$x^2=(2k)^2=2(2k^2)$，因此 x^2 为偶数。至于反命题，可以用反证法来证明。假设 x 不是偶数，因此 x 为奇数并且可以写成 $x=2k+1$，k 为整数。则 $3x+2=3(2k+1)+2=6k+5=2(3k+2)+1$ 是奇数(不是偶数)，因为可以写成 $2t+1$ 的形式，其中 $t=3k+2$。同样，$x+5=2k+1+5=2(k+3)$，因此 $x+5$ 是偶数(不是奇数)。x^2 是奇数在例 1 中已经给出证明。

17. 我们将用反证法(i)→(ii)，(ii)→(i)，(i)→(iii)和(iii)→(i)。对于第一个，假设 $3x+2$ 是有理数，即 $3x+2=p/q$，p 和 q 为整数且 $q\neq 0$。可以写出 $x=((p/q)-2)/3=(p-2q)/(3q)$，其中 $3q\neq 0$。这表明 x 是有理数。对于第二个条件语句，假设 x 是有理数，同样，$x=p/q$，其中 $q\neq 0$。则可以写出 $3x+2=(3p+2q)/q$，其中 $q\neq 0$。这表明 $3x+2$ 是有理数。对于第三个条件语句，假设 $x/2$ 是有理数，即等于 p/q、p 和 q 为整数且 $q\neq 0$。则可以写出 $x=2p/q$，其中 $q\neq 0$。这表明 x 是有理数。而对于第四个条件语句，假设 x 是有理数，即等于 p/q，p 和 q 为整数且 $q\neq 0$。则可以写出 $x/2=p/(2q)$，其中 $2q\neq 0$。这就表明 $x/2$ 是有理数。

18. 否

19. 假设 $p_1\to p_4\to p_2\to p_5\to p_3\to p_1$。为了证明其中一个命题蕴含其他任意一个命题，重复使用假设三段论即可。

20. 我们将用矛盾证明法给出证明。假设 a_1，a_2，…，a_n 都小于 A，其中 A 是这些数的平均值。则有 $a_1+a_2+\cdots+a_n<nA$。两边同时除以 n 可得，$A=(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n<A$，这是一个矛盾。

21. 我们将通过证明(i)蕴含(ii)，(ii)蕴含(iii)，(iii)蕴含(iv)，(iv)蕴含(i)来证明这四个命题是相互等价的。首先，假设 n 为偶数。则有 $n=2k$，k 为整数。则 $n+1=2k+1$，所以 $n+1$ 为奇数。这就证明了(i)蕴含(ii)。接下来，假设 $n+1$ 是奇数，则有 $n+1=2k+1$，k 为整数。则 $3n+1=2n+(n+1)=2(n+k)+1$，这就证明了 $3n+1$ 是奇数，也证明了(ii)蕴含(iii)。接下来，假设 $3n+1$ 是奇数，所以 $3n+$

$1=2k+1$，k 为整数。则 $3n=(2k+1)-1=2k$，因此 $3n$ 是偶数。这就证明了(iii)蕴含(iv)。最后，假设 n 不是偶数。则 n 就是奇数，所以 $n=2k+1$，k 为整数。则 $3n=3(2k+1)=6k+3=2(3k+1)+1$，因此 $3n$ 是奇数。这就利用反证法完成(iv)蕴含(i)的证明。

1.8 节

1. $1^2+1=2\geqslant 2=2^1$；$2^2+1=5\geqslant 4=2^2$；$3^2+1=10\geqslant 8=2^3$；$4^2+1=17\geqslant 16=2^4$。
2. 如果 $x\leqslant y$，则 $\max(x, y)+\min(x, y)=y+x=x+y$。如果 $x\geqslant y$，则 $\max(x, y)+\min(x, y)=x+y$。因为只有这两种情形，所以等式总成立。
3. 因为 $|x-y|=|y-x|$，所以 x 和 y 的值可交换。因此，不失一般性，我们可以假设 $x\geqslant y$。则 $(x+y-(x-y))/2=(x+y-x+y)/2=2y/2=y=\min(x, y)$。类似地，$(x+y+(x-y))/2=(x+y+x-y)/2=2x/2=x=\max(x, y)$。
4. 存在四种情形。

   情形 1：$x\geqslant 0$ 并且 $y\geqslant 0$。则 $|x|+|y|=x+y=|x+y|$。

   情形 2：$x<0$ 并且 $y<0$。则 $|x|+|y|=-x+(-y)=-(x+y)=|x+y|$，因为 $x+y<0$。

   情形 3：$x\geqslant 0$ 并且 $y<0$。则 $|x|+|y|=x+(-y)$。如果 $x\geqslant -y$，则 $|x+y|=x+y$。但是由于 $y<0$，$-y>y$，所以 $|x|+|y|=x+(-y)>x+y=|x+y|$。如果 $x<-y$，则 $|x+y|=-(x+y)=-x+(-y)$。但是由于 $x\geqslant 0$，$x\geqslant -x$，所以 $|x|+|y|=x+(-y)\geqslant -x+(-y)=|x+y|$。

   情形 4：$x<0$ 并且 $y\geqslant 0$。与情形 3 相同，只是交换了 x 和 y 的角色。
5. 10 001，10 002，…，10 100 都是非平方项，因为 $100^2=10\ 000$，$101^2=10\ 201$；构造性的。
6. $8=2^3$ 且 $9=3^2$。
7. 令 $x=2$，$y=\sqrt{2}$。如果 $x^y=2^{\sqrt{2}}$ 是无理数，则得证。如果不成立，则令 $x=2^{\sqrt{2}}$，$y=\sqrt{2}/4$。则 $x^y=x^y=(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}/4}=2^{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2})/4}=2^{1/2}=\sqrt{2}$。
8. a)这个命题断言具有某个性质的 x 存在。如果令 $y=x$，则可得 $P(x)$ 为真。如果 y 是 x 之外的任意值，则 $P(x)$ 为假。因此，x 是唯一使 P 为真的值。

   b)这里第一个子句论述存在一个元素使 P 为真。第二个子句论述只要有两个元素同时使得 P 为真，则它们实际上是同一个元素。

   c)这个语句断言使得 P 为真的 x 存在，并且具有一个更进一步性质即只要找到一个元素使得 P 为真，则该元素就是 x。换言之，x 是唯一使 P 为真的元素。
9. 等式 $|a-c|=|b-c|$ 等价于两个等式的析取：$a-c=b-c$ 或 $a-c=-b+c$。第一个式子等价于 $a=b$，这与题设矛盾，因此原等式等价于 $a-c=-b+c$。在等式两边加上 $b+c$ 并除以 2 可得 $c=(a+\mathrm{b})/2$。因此，存在有唯一解。而且，这个 c 是整数，因为奇整数 a 和 b 的和是偶数。
10. 我们需要求解 $n=(k-2)+(k+3)$ 中的 k。使用代数规则的普通逆变换可知，此式等价于 $k=(n-1)/2$。换言之，这是唯一可使等式为真的 k 值。因为 n 为奇数，$n-1$ 为偶数，所以 k 是整数。
11. 如果 x 本身是整数，则可取 $n=x$ 且 $\varepsilon=0$。在这种情形下无其他解，因为如果整数 n 大于 x，则 n 至少是 $x+1$，这将使得 $\varepsilon\geqslant 1$。如果 x 不是整数，则向上取整，并称此整数为 n。令 $\varepsilon=n-x$。显然 $0\leqslant\varepsilon<1$，这是唯一与该 n 相对应的 ε，且 n 不能再大，因为 ε 限制为小于 1。
12. 两个不同正实数 x 和 y 的调和均值总是小于它们的几何均值。要证明 $2xy/(x+y)<\sqrt{xy}$，在等式两边同时乘以 $(x+y)/(2\sqrt{xy})$，得到等价的不等式 $\sqrt{xy}<(x+y)/2$，这在例 14 中已经得证。
13. 写在黑板上数字之和的奇偶性(奇或偶)是永远不会变的，因为 $j+k$ 与 $|j-k|$ 具有同样的奇偶性(在每一步这个和减少 $j+k$ 而增加 $|j-k|$)。所以在此过程结束时的整数必定与 $1+2+\cdots+(2n)=n(2n+1)$ 具有相同的奇偶性，它是奇数，因为 n 是奇数。
14. 不失一般性，我们可以假设 n 是非负的，因为整数的 4 次方及其负数的 4 次方是相同的。我们将任意正整数 n 除以 10，得到商 k 和余数 l，因此 $n=10k+l$。l 是 0～9 的整数。然后我们在这 10 种情形下计算 n^4。我们得到如下的值，其中 X 是 10 的倍数的某个整数，其具体值不必关心。

$$(10k+0)^4=10\,000k^4=10\,000k^4+0$$
$$(10k+1)^4=10\,000k^4+X\cdot k^3+X\cdot k^2+X\cdot k+1$$
$$(10k+2)^4=10\,000k^4+X\cdot k^3+X\cdot k^2+X\cdot k+16$$
$$(10k+3)^4=10\,000k^4+X\cdot k^3+X\cdot k^2+X\cdot k+81$$
$$(10k+4)^4=10\,000k^4+X\cdot k^3+X\cdot k^2+X\cdot k+256$$
$$(10k+5)^4=10\,000k^4+X\cdot k^3+X\cdot k^2+X\cdot k+625$$
$$(10k+6)^4=10\,000k^4+X\cdot k^3+X\cdot k^2+X\cdot k+1296$$
$$(10k+7)^4=10\,000k^4+X\cdot k^3+X\cdot k^2+X\cdot k+2401$$
$$(10k+8)^4=10\,000k^4+X\cdot k^3+X\cdot k^2+X\cdot k+4096$$
$$(10k+9)^4=10\,000k^4+X\cdot k^3+X\cdot k^2+X\cdot k+6561$$

因为由 X 表示的每个系数都是 10 的倍数，所以对应项不会对结果的个位数产生影响。因此，个位数分别是 0、1、6、1、6、5、6、1、6、1，因此个位数总是 0、1、5 或 6。

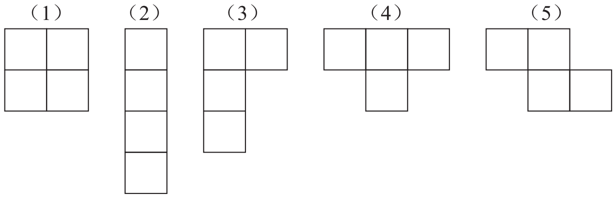
15. 因为对所有 $n>4$ 有 $n^3>100$，所以我们只需要注意 $n=1$、$n=2$、$n=3$ 和 $n=4$ 不满足 $n^2+n^3=100$。
16. 因为 $5^4=625$，所以 x 和 y 都必须小于 5。则 $x^4+y^4\leqslant 4^4+4^4=512<625$。
17. 如果 $a\leqslant\sqrt[3]{n}$、$b\leqslant\sqrt[3]{n}$，或者 $c\leqslant\sqrt[3]{n}$均不为真，则 $a>\sqrt[3]{n}$、$b>\sqrt[3]{n}$并且 $c>\sqrt[3]{n}$。把这些正数的不等式相乘，得到 $abc>(\sqrt[3]{n})^3=n$，这蕴含了 $n=abc$ 假设的否定。
18. 通过找到一个公分母，我们可以假设给定的有理数是 a/b 和 c/b，其中 b 为正整数，a 和 c 为整数，且 $a<c$。特别地，$(a+1)/b\leqslant c/b$。因此，$x=\left(a+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)/b$ 介于两个给定的有理数之间，因为 $0<\sqrt{2}<2$。再者，x 是无理数，因为如果 x 是有理数，则 $2(bx-\mathrm{a})=\sqrt{2}$也应该是有理数，这与 1.7 节的例 10 相矛盾。
19. a)不失一般性，假设 x 序列已经按非递减序排列，因为我们可以重新标记下标。对于 y 序列只有有限的几种排序方式，因此如果我们能证明只要找到错序的 y_i 和 y_j(即 $i<j$ 时 $y_i>y_j$)并通过交换它们就能使总和递增(或至少保持不变)，则我们就可以证明当序列 y 非递增时总和是最大的。事实上，如果执行交换，则在总和上加上了 $x_iy_j+x_jy_i$ 再减掉 $x_iy_i+x_jy_j$。净效果是加上了 $x_iy_j+x_jy_i-x_iy_i-x_jy_j=(x_j-x_i)(y_i-y_j)$，由排序的假设这是非负的。

    b)类似于(a)。
20. a)$6\to3\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$

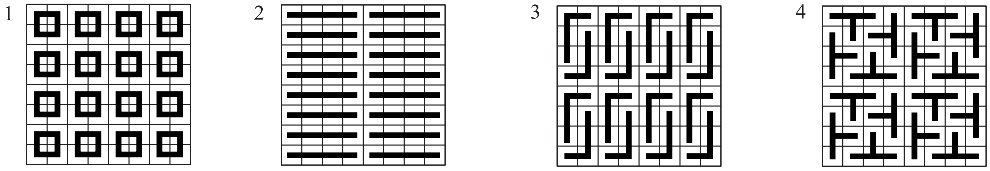
    b)$7\to22\to11\to34\to17\to52\to26\to13\to40\to20\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$

    c)$17\to52\to26\to13\to40\to20\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$

    d)$21\to64\to32\to16\to8\to4\to2\to1$
21. 不失一般性，我们假设棋盘的左上角和右上角被移除了。用 3 个骨牌水平填充到第一行的其余部分，并用 4 个骨牌水平填充其他 7 行。
22. 因为棋盘总共有偶数个方格，所以要么每行有偶数个方格，要么每列有偶数个方格。前一种情形可通过水平放置骨牌来拼接棋盘，而后一种情形则可通过垂直放置骨牌来拼接棋盘。
23. 可以做适当的旋转使得去掉的方格为 1 和 16。方格 2 必须用一个骨牌覆盖。如果骨牌覆盖方格 2 和 6，则接下来的骨牌放置就必须依次：5～9、13～14 和 10～11，这样就无法覆盖方格 15。否则，方格 2 必须由放置在 2～3 上的骨牌覆盖。则接下来的骨牌放置就必须为：4～8、11～12、6～7、5～9 和 10～14，依然无法覆盖方格 15。
24. 去掉与一个白色角相邻的两个黑色方格，再移除那个角之外的两个白色方格。则没有骨牌可以覆盖那个白色角。
25. a) （1） （2） （3） （4） （5）



b)下图展示了用前四种四联骨牌的拼接。



为了证明第五种四联骨牌不能拼接棋盘，将方格标记为 1～64，从上至下一次一行，每行从左至右。因此，方格 1 是左上角，方格 64 是右下角。假设我们有一种拼接，由对称性，可以不失一般性地假设第一块放在左上角，覆盖方格 1、2、10 和 11。这就迫使另一块紧挨其右边，覆盖方格 3、4、12 和 13。依此方式继续，我们不得不用一块骨牌覆盖方格 6、7、15 和 16。这就导致不可能再覆盖方格 8。因此，这种拼接不可能存在。

补充练习(只给出奇数编号答案，后同)

1. a) $q\rightarrow p$　　b) $q\wedge p$　　c) $\neg q\vee\neg p$　　d) $q\leftrightarrow p$

3. a)该命题不可能为假，除非 $\neg p$ 为假，所以 p 为真。如果 p 为真且 q 为真，则 $\neg q\wedge(p\rightarrow q)$ 为假，所以条件语句为真。如果 p 为真而 q 为假，则 $p\rightarrow q$ 为假，所以 $\neg q\wedge(p\rightarrow q)$ 为假，而条件语句为真。
   b)该命题不可能为假，除非 q 为假。如果 q 为假而 p 为真，则 $(p\vee q)\wedge\neg p$ 为假，而条件语句为真。如果 q 为假且 p 为假，则 $(p\vee q)\wedge\neg p$ 也为假，而条件语句为真。

5. $\neg q\rightarrow\neg p$；$p\rightarrow q$；$\neg p\rightarrow\neg q$。

7. $(p\wedge q\wedge r\wedge\neg s)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge s)\vee(p\wedge\neg q\wedge r\wedge s)\vee(\neg p\wedge q\wedge r\wedge s)$

9. 使用有含义的字母将这些语句翻译成符号，可得 $\neg t\rightarrow\neg g$、$\neg g\rightarrow\neg q$、$r\rightarrow q$ 和 $\neg t\wedge r$。假定这些语句是一致的。第四个语句表明 $\neg t$ 必为真。因此，由假言推理和第一个语句，可知 $\neg g$ 为真，因此(从第二个语句)，可知 $\neg q$ 为真。同样，第四个语句说明 r 必为真，再次由假言推理(第三个语句)可得 q 为真。这是一个矛盾：$q\wedge\neg q$。因此这些语句是不一致的。

11. 拒绝-接受-拒绝-接受，接受-接受-接受-接受，接受-接受-拒绝-接受，拒绝-拒绝-拒绝-拒绝，拒绝-拒绝-接受-拒绝，拒绝-接受-接受-接受。

13. Aaron 是无赖而 Crystal 是骑士；不能断定 Bohan 是什么。

15. Brenda

17. 这些前提不能同时为真，因为它们是互相矛盾的。所以，根据定义无需证明这是一个有效的论证：只要所有的前提为真，则结论也为真。因为前提不能同时为真，所以不能得出结论为真。

19. 利用 1.3 节中给出的关于 9×9 数独的命题，将变量的下标从 1～9 改为从 1～16，再做一些类似的更改，即可得到 4×4 单元的命题：$\bigwedge_{r=0}^{3}\bigwedge_{s=0}^{3}\bigwedge_{n=1}^{16}\bigvee_{i=1}^{4}\bigvee_{j=1}^{4}p(4r+i,\ 4s+j,\ n)$。

21. a)**F**　　b)**T**　　c)**F**　　d)**T**　　e)**F**　　f)**T**

23. 有很多解答。一个例子就是美国参议员。

25. $\forall x\exists y\exists z(y\neq z\wedge\forall w(P(w,x)\leftrightarrow(w=y\vee w=z)))$

27. a) $\neg\exists xP(x)$
    b) $\exists x(P(x)\wedge\forall y(P(y)\rightarrow y=x))$
    c) $\exists x_1\exists x_2(P(x_1)\wedge P(x_2)\wedge x_1\neq x_2\wedge\forall y(P(y)\rightarrow(y=x_1\vee y=x_2)))$
    d) $\exists x_1\exists x_2\exists x_3(P(x_1)\wedge P(x_2)\wedge P(x_3)\wedge x_1\neq x_2\wedge x_1\neq x_3\wedge x_2\neq x_3\wedge\forall y(P(y)\rightarrow(y=x_1\vee y=x_2\vee y=x_3)))$

29. 假定 $\exists x(P(x)\rightarrow Q(x))$ 为真。则或者对某个 x_0 有 $Q(x_0)$ 为真，这时 $\forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x)$ 为真；或者对某个 x_0 有 $P(x_0)$ 为假，这时 $\forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x)$ 也为真。反之，假定 $\exists x(P(x)\rightarrow Q(x))$ 为假。这意味着 $\forall x(P(x)\wedge\neg Q(x))$ 为真，这蕴含着 $\forall xP(x)$ 和 $\forall x(\neg Q(x))$。后一命题等价于 $\neg\exists xQ(x)$。这样，$\forall xP(x)\rightarrow\exists xQ(x)$ 为假。

31. 不。

33. $\forall x\forall z\exists yT(x,y,z)$，其中 $T(x,y,z)$ 为“学生 x 已选修 z 系的 y 课程”，而论域分别是该班上所有学生集合、这所大学中开设的所有课程集合，以及数学学院中所有系的集合。

35. $\exists!x\exists!yT(x, y)$，$\exists x\forall z((\exists y\forall w(T(z, w)\leftrightarrow w=y))\leftrightarrow z=x)$。其中 $T(x, y)$的含义是学生 x 选修课程 y，而论域是班上所有学生集合。

37. 由全称量词实例化得 $P(\mathrm{a})\to Q(\mathrm{a})$，$Q(\mathrm{a})\to R(\mathrm{a})$；则由假言推理得$\neg Q(\mathrm{a})$，再由假言推理得$\neg P(\mathrm{a})$。

39. 在此给出反证法证明，证明如果$\sqrt{x}$是有理数，则 x 是有理数，这里假设 $x\geqslant 0$。假定$\sqrt{x}=p/q$ 是有理数，$q\neq 0$。则 $x=(\sqrt{x})^2=p^2/q^2$ 也是有理数(q^2 也是非零的)。

41. 通过令 $m=10^{500}+1$ 可以给出一个构造性证明。则 $m^2=(10^{500}+1)^2>(10^{500})^2=10^{1000}$。

43. 23 不能写为 8 个立方数之和。

45. 223 不能写为 36 个 5 次幂之和。

第 2 章

2.1 节

1. a)$\{-1, 1\}$
   b)$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
   c)$\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$
   d)$\varnothing$

2. a)第一个是第二个的子集，但第二个不是第一个的子集。
   b)哪个也不是另一个的子集。
   c)第一个是第二个的子集，但第二个不是第一个的子集。

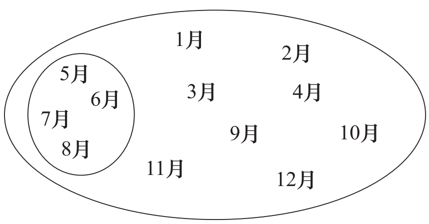
3. a)是　b)否　c)否

4. a)是　b)不是　c)是　d)不是　e)不是　f)不是

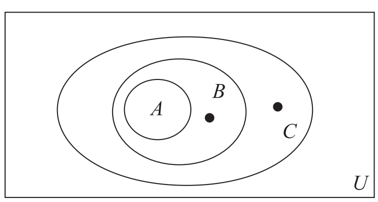
5. a)假　b)假　c)假　d)真　e)假　f)假　g)真

6. a)真　b)真　c)假　d)真　e)真　f)假

7.



8. 在某些区域中的小圆点表示该区域不为空。



9. 假定 $x\in A$。由于 $A\subseteq B$，这蕴含着 $x\in B$。由于 $B\subseteq C$，可知 $x\in C$。由于 $x\in A$ 蕴含 $x\in C$，所以可得 $A\subseteq C$。

10. a)1　b)1　c)2　d)3

11. a)$\{\varnothing, \{a\}\}$
    b)$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
    c)$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

12. a)8　b)16　c)2

13. 对于“当”部分，给定 $A\subseteq B$，我们要证明$\mathcal{P}(A)\subseteq\mathcal{P}(B)$，即如果 $C\subseteq A$ 则 $C\subseteq B$。这个可以直接由练习 17 得出。对于“仅当”部分，给定$\mathcal{P}(A)\subseteq\mathcal{P}(B)$，我们要证明 $A\subseteq B$。假设 $a\in A$。则$\{a\}\subseteq A$，所以$\{a\}\in\mathcal{P}(A)$。因为$\mathcal{P}(A)\subseteq\mathcal{P}(B)$，所以$\{a\}\in\mathcal{P}(B)$，这意味着$\{a\}\subseteq B$。但这也蕴含了所期望

的$a\in B$。

14. a)$\{(a,y),(b,y),(c,y),(d,y),(a,z),(b,z),(c,z),(d,z)\}$

    b)$\{(y,a),(y,b),(y,c),(y,d),(z,a),(z,b),(z,c),(z,d)\}$

15. 三元组(a,b,c)的集合，其中a是航线，b和c是城市。该集合的一个有意思的子集是三元组(a,b,c)的集合，其中a是b和c之间的航线。

16. $\varnothing\times A=\{(x,y)\mid x\in\varnothing\land y\in A\}=\varnothing=\{(x,y)\mid x\in A\land y\in\varnothing\}=A\times\varnothing$

17. a)$\{(0,0),(0,1),(0,3),(1,0),(1,1),(1,3),(3,0),(3,1),(3,3)\}$

    b)$\{(1,1),(1,2),(1,a),(1,b),(2,1),(2,2),(2,a),(2,b),(a,1),(a,2),(a,a),(a,b),(b,1),(b,2),(b,a),(b,b)\}$

18. mn

19. m^n

20. $A\times B\times C$的元素是由三元组(a,b,c)构成。其中$a\in A$，$b\in B$，$c\in C$，而$(A\times B)\times C$的元素则形如$((a,b),c)$，是序偶，该序偶的第一个元素也是一个序偶。

21. a)实数的平方绝不会是-1。真。

    b)存在一个整数其平方等于2。假。

    c)每个整数的平方都是正的。假。

    d)存在某一实数等于它自身的平方。真。

22. a)$\{-1,0,1\}$　　b)$\mathbf{Z}-\{0,1\}$　　c)$\varnothing$

23. 我们必须证明$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$当且仅当$a=c$且$b=d$。显然“当”部分直接可得的。所以假定这两个集合相等。首先，考虑$a\neq b$的情形。这时$\{\{a\},\{a,b\}\}$恰好含有两个元素，其中一个只包含一个元素。这样$\{\{c\},\{c,d\}\}$也必须有同样的性质，所以$c\neq d$，且$\{c\}$是那个只包含一个元素的元素。于是$\{a\}=\{c\}$，这蕴含着$a=c$。另外，两个元素的集合$\{a,b\}$和$\{c,d\}$也必须相等。因为$a=c$且$a\neq b$,可得$b=d$。其次，假定$a=b$。则$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{a\}\}$，这是只含一个元素的集合。因此，$\{\{c\},\{c,d\}\}$也只含一个元素，这只有在$c=d$时才有可能，而该集合为$\{\{c\}\}$。从而可得$a=c$且$b=d$。

24. 令$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$。把S的每个子集用长度为n的位串表示，其中第i位为1当且仅当$a_i\in S$。为了产生S的所有子集，列出所有2^n个长度为n的位串(例如，按递增序)，再写下相应的子集。

2.2节

1. a)住处离校不超过1英里且走路上学的学生集合。

   b)住处离校不超过1英里或走路上学的学生集合。

   c)住处离校不超过1英里但不走路上学的学生集合。

   d)走路上学但住处离校超过1英里的学生集合。

2. a)$\{0,1,2,3,4,5,6\}$　　b)$\{3\}$　　c)$\{1,2,4,5\}$　　d)$\{0,6\}$

3. $\overline{\overline{A}}=\{x\mid\neg(x\in\overline{A})\}=\{x\mid\neg(\neg x\in A)\}=\{x\mid x\in A\}=A$

4. a)$A\cup U=\{x\mid x\in A\lor x\in U\}=\{x\mid x\in A\lor\mathbf{T}\}=\{x\mid\mathbf{T}\}=U$

   b)$A\cap\varnothing=\{x\mid x\in A\land x\in\varnothing\}=\{x\mid x\in A\land\mathbf{F}\}=\{x\mid\mathbf{F}\}=\varnothing$

5. a)$A\cup\overline{A}=\{x\mid x\in A\lor x\notin A\}=U$

   b)$A\cap\overline{A}=\{x\mid x\in A\land x\notin A\}=\varnothing$

6. a)$A\cup B=\{x\mid x\in A\lor x\in B\}=\{x\mid x\in B\lor x\in A\}=B\cup A$

   b)$A\cap B=\{x\mid x\in A\land x\in B\}=\{x\mid x\in B\land x\in A\}=B\cap A$

7. 假定$x\in A\cap(A\cup B)$。则由交集的定义可知，$x\in A$且$x\in A\cup B$。因为$x\in A$，所以我们证明了左边是右边的子集。反之，令$x\in A$。则由并集的定义可知，$x\in A\cup B$。因此由交集的定义可知$x\in A\cap(A\cup B)$，所以右边是左边的子集。

8. a)$x\in\overline{A\cup B}\equiv x\notin(A\cup B)\equiv\neg(x\in A\lor x\in B)\equiv\neg(x\in A)\land\neg(x\in B)\equiv x\notin A\land x\notin B\equiv x\in\overline{A}\land x\in\overline{B}\equiv x\in\overline{A}\cap\overline{B}$

b)

A	B	$A\cup B$	$\overline{(A\cup B)}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\cap\overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

9\. a)$x\in\overline{A\cap B\cap C}\equiv x\notin A\cap B\cap C\equiv x\notin A\vee x\notin B\vee x\notin C\equiv x\in\overline{A}\vee x\in\overline{B}\vee x\in\overline{C}\equiv x\in\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$

b)

A	B	C	$A\cap B\cap C$	$\overline{(A\cap B\cap C)}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$
1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

10\. a)两边都等于$\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$。

b)$A=A\cap U=A\cap(B\cup\overline{B})=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$

11\. $x\in A\cup(B\cup C)\equiv(x\in A)\vee(x\in(B\cup C))\equiv(x\in A)\vee(x\in B\vee x\in C)\equiv(x\in A\vee x\in B)\vee(x\in C)\equiv x\in(A\cup B)\cup C$

12\. $x\in A\cup(B\cap C)\equiv(x\in A)\vee(x\in(B\cap C))\equiv(x\in A)\vee(x\in B\wedge x\in C)\equiv(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)\equiv x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

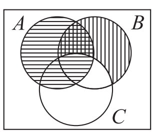
13\. a)$\{4，6\}$

b)$\{0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10\}$

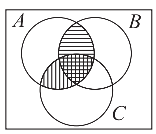
c)$\{4，5，6，8，10\}$

d)$\{0，2，4，5，6，7，8，9，10\}$

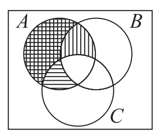
14\. a)双阴影部分是所求的集合。



b)所求的集合是整个阴影部分。



c)所求的集合是整个阴影部分。



15\. a)$B\subseteq A$

b)$A\subseteq B$

c)$A\cap B=\varnothing$

d)没什么可说的，因为它总是为真

e)$A=B$

16\. $A\subseteq B\equiv\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\equiv\forall x(x\notin B\rightarrow x\notin A)\equiv\forall x(x\in\overline{B}\rightarrow x\in\overline{A})\equiv\overline{B}\subseteq\overline{A}$

17\. 主修计算机科学而不主修数学，或主修数学而不主修计算机科学的所有学生的集合。

18\. 一个元素属于$(A\cup B)-(A\cap B)$如果它属于 A 和 B 的并集却不属于 A 和 B 的交集，这意味着它在 A 或 B 中，但不同时在 A 和 B 中。这正是一个元素属于 $A\oplus B$ 的含义。

19\. a)$A\oplus A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$

b)$A\oplus\varnothing=(A-\varnothing)\cup(\varnothing-A)=A\cup\varnothing=A$

c)$A\oplus U=(A-U)\cup(U-A)=\varnothing\cup\overline{A}=\overline{A}$

d)$A\oplus\overline{A}=(A-\overline{A})\cup(\overline{A}-A)=A\cup\overline{A}=U$

20\. $B=\varnothing$

21\. 是

22\. 是

23\. 如果 $A\cup B$ 是有限集，则它有 n 个元素，n 为某个自然数。但是因为 A 是无限集，所以具有比 n 多的元素，而 $A\cup B$ 具有所有 A 的元素，所以 $A\cup B$ 具有多于 n 个元素。该矛盾证明了 $A\cup B$ 必是无

限集。

24. a) $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$　b) $\{1\}$

25. a) A_n　b) $\{0, 1\}$

26. a) $\mathbf{Z}$，$\{-1, 0, 1\}$　b) $\mathbf{Z}-\{0\}$，$\varnothing$

c) R，$[-1, 1]$　d) $[1, \infty)$，$\varnothing$

27. a) $\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$

b) $\{2, 4, 5, 6, 7\}$

c) $\{1, 10\}$

28. 如果第一个位串的第 i 位是 1 而第二个位串的第 i 位为 0，则两个集合之差的位串的第 i 位是 1；否则为 0。

29. a) 11 1110 0000 0000 0000 0000 0000 $\vee$ 01 1100 1000 0000 0100 0101 0000 = 11 1110 1000 0000 0100 0101 0000，代表 $\{a, b, c, d, e, g, p, t, v\}$

b) 11 1110 0000 0000 0000 0000 0000 $\wedge$ 01 1100 1000 0000 0100 0101 0000 = 01 1100 0000 0000 0000 0000 0000，代表 $\{b, c, d\}$

c) (11 1110 0000 0000 0000 0000 0000 $\vee$ 00 0110 0110 0001 1000 0110 0110) $\wedge$ (01 1100 1000 0000 0100 0101 0000 $\vee$ 00 1010 0010 0000 1000 0010 0111) = 11 1110 0110 0001 1000 0110 0110 $\wedge$ 01 1110 1010 0000 1100 0111 0111 = 01 1110 0010 0000 1000 0110 0110，代表 $\{b, c, d, e, i, o, t, u, x, y\}$

d) 11 1110 0000 0000 0000 0000 0000 $\vee$ 01 1100 1000 0000 0100 0101 0000 $\vee$ 00 1010 0010 0000 1000 0010 0111 $\vee$ 00 0110 0110 0001 1000 0110 0110 = 11 1110 1110 0001 1100 0111 0111，代表 $\{a, b, c, d, e, g, h, i, n, o, p, t, u, v, x, y, z\}$

30. a) $\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$　b) $\{\varnothing\}$

c) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$　d) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

31. a) $\{3 \cdot a, 3 \cdot b, 1 \cdot c, 4 \cdot d\}$　b) $\{2 \cdot a, 2 \cdot b\}$

c) $\{1 \cdot a, 1 \cdot c\}$　d) $\{1 \cdot b, 4 \cdot d\}$

e) $\{5 \cdot a, 5 \cdot b, 1 \cdot c, 4 \cdot d\}$

32. $\overline{F}$ = {0.4 Alice，0.1 Brian，0.6 Fred，0.9 Oscar，0.5 Rita}

$\overline{R}$ = {0.6 Alice，0.2 Brian，0.8 Fred，0.1 Oscar，0.3 Rita}

33. {0.4 Alice，0.8 Brian，0.2 Fred，0.1 Oscar，0.5 Rita}

2.3 节

1. a) $f(0)$ 无定义。

b) 对于 $x<0$，$f(x)$ 无定义。

c) 因为对每个 x 都指派了两个不同值，所以 $f(x)$ 不是良定义的。

2. a) 不是函数　b) 是函数　c) 不是函数

3. a) 定义域为位串的集合；值域为整数集合。

b) 定义域为位串的集合；值域为非负偶整数集合。

c) 定义域为位串的集合；值域为不超过 7 的非负整数集合。

d) 定义域为正整数的集合；值域为正整数平方的集合 $=\{1, 4, 9, 16, \cdots\}$。

4. a) 定义域为 $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$；值域为 $\mathbf{Z}^+$。

b) 定义域为 $\mathbf{Z}^+$；值域为 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$。

c) 定义域为位串集合；值域为 $\mathbf{N}$。

d) 定义域为位串集合；值域为 $\mathbf{N}$。

5. a) 1　b) 0　c) 0　d) -1

e) 3　f) -1　g) 2　h) 1

6. 只有 a) 中的函数是。

7. 只有 a) 和 d) 中的函数是。

8. a) 映上　b) 不是映上　c) 映上

d) 不映上　e) 映上

9. a)取决于老师们是否共享办公室。
   b)一对一的，假设一辆巴士上只有一位老师。
   c)很可能不是一对一的，特别是，如果薪水是通过集体谈判协商来确定的。
   d)一对一。
10. 答案可变。a)学校办公室的集合；可能不是映上的。
    b)旅途中巴士的集合；映上的，假设一辆巴士上只有一位陪伴老师。
    c)实数集合；不是映上的。
    d)9 个数字串的集合，其中第 3 个和第 5 个数字后有一短横；不是映上的。
11. a)当 $x\geqslant 0$ 时函数 $f(x)=3x+1$，当 $x<0$ 时函数 $f(x)=-3x+2$。
    b)$f(x)=|x|+1$
    c)当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)=2x+1$，当 $x<0$ 时 $f(x)=-2x$
    d)$f(x)=x^2+1$
12. a)是　　b)不是　　c)是　　d)不是
13. 假定 f 严格递减。这意味着当 $x<y$ 时有 $f(x)>f(y)$。为了证明 g 严格递增，假定 $x<y$。则 $g(x)=1/f(x)<1/f(y)=g(y)$。反之，假定 g 严格递增。这意味着当 $x<y$ 时有 $g(x)<g(y)$。为了证明 f 严格递减，假定 $x<y$。则 $f(x)=1/g(x)>1/g(y)=f(y)$。
14. a)令 f 是从 $\mathbf{R}$ 到其自身的一个严格递减函数。如果 $a<b$，则 $f(a)>f(b)$；如果 $a>b$，则 $f(a)<f(b)$。这样，如果 $a\neq b$，则 $f(a)\neq f(b)$。
    b)答案可变；例如，对于 $x<0$ 时 $f(x)=0$ 而对于 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)=-x$。
15. 函数不是一对一的，因此它是不可逆的。在限制域上，该函数是非负实数域上的恒等函数，$f(x)=x$，所以它是其自身的逆。
16. a)$f(S)=\{0,1,3\}$
    b)$f(S)=\{0,1,3,5,8\}$
    c)$f(S)=\{0,8,16,40\}$
    d)$f(S)=\{1,12,33,65\}$
17. a)令 x 和 y 为 A 中不同的元素。由于 g 是一对一的，所以 $g(x)$和 $g(y)$是 B 中不同的元素。又因为 f 是一对一的，所以 $f(g(x))=(f\circ g)(x)$和 $f(g(y))=(f\circ g)(y)$是 C 中不同元素。因此，$f\circ g$ 是一对一的。
    b)令 $y\in C$。因为 f 是映上的，所以存在某个 $b\in B$ 使得 $y=f(b)$。又因为 g 是映上的，所以存在某个 $x\in A$ 使得 $b=g(x)$。因此，$y=f(b)=f(g(x))=(f\circ g)(x)$。从而可得 $f\circ g$ 是映上的。
18. 不是。例如，假定 $A=\{a\}$，$B=\{b,c\}$，$C=\{d\}$。令 $g(a)=b$，$f(b)=d$，$f(c)=d$。则 f 和 $f\circ g$ 都是映上的，但 g 不是。
19. $(f+g)(x)=x^2+x+3$，$(fg)(x)=x^3+2x^2+x+2$
20. f 是一对一的，因为 $f(x_1)=f(x_2)\rightarrow ax_1+b=ax_2+b\rightarrow ax_1=ax_2\rightarrow x_1=x_2$。$f$ 是映上的，因为 $f((y-b)/a)=y$，$f^{-1}(y)=(y-b)/a$。
21. a)$\{x\mid 0\leqslant x<1\}$　　b)$\{x\mid -1\leqslant x<2\}$　　c)$\varnothing$
22. $f^{-1}(\overline{S})=\{x\in A\mid f(x)\notin S\}=\overline{\{x\in A\mid f(x)\in S\}}=\overline{f^{-1}(S)}$
23. 令 $x=\lfloor x\rfloor+\varepsilon$，其中 ε 为实数，满足 $0\leqslant\varepsilon<1$。如果 $\varepsilon<1/2$，则 $\lfloor x\rfloor-1<x-1/2<\lfloor x\rfloor$，所以 $\lceil x-1/2\rceil=\lfloor x\rfloor$ 且这是最接近 x 的整数。如果 $\varepsilon>1/2$，则 $\lfloor x\rfloor<x-1/2<\lfloor x\rfloor+1$，所以 $\lceil x-1/2\rceil=\lfloor x\rfloor+1$ 且这是最接近 x 的整数。如果 $\varepsilon=1/2$，则 $\lceil x-1/2\rceil=\lfloor x\rfloor$，这是围绕 x 且到 x 的距离相等的两个整数中较小的一个。
24. 把实数 x 写成 $\lfloor x\rfloor+\varepsilon$，其中 ε 是实数且满足 $0\leqslant\varepsilon<1$。因为 $\varepsilon=x-\lfloor x\rfloor$，可得 $0\leqslant x-\lfloor x\rfloor<1$。由此可直接得出前两个不等式 $x-1<\lfloor x\rfloor$ 和 $\lfloor x\rfloor\leqslant x$。对于另外两个不等式，把 x 写成 $x=\lceil x\rceil-\varepsilon'$，其中 $0\leqslant\varepsilon'<1$。则 $0\leqslant\lceil x\rceil-x<1$，从而可得所需的不等式。
25. a)如果 $x<n$，由于 $\lfloor x\rfloor\leqslant x$，所以 $\lfloor x\rfloor<n$。假定 $x\geqslant n$，由下取整函数的定义知 $\lfloor x\rfloor\geqslant n$。这意味着如果 $\lfloor x\rfloor<n$，则 $x<n$。

b)如果 $n<x$，则由于 $x\leqslant\lceil x\rceil$，可得 $n\leqslant\lceil x\rceil$。假定 $n\geqslant x$，由上取整函数的定义知 $\lceil x\rceil\leqslant n$。这意味着如果 $n<x$，则 $n<\lceil x\rceil$。

26. 如果 n 为偶数，则对某个整数 k 有 $n=2k$。因此 $\lfloor n/2\rfloor=\lfloor k\rfloor=k=n/2$。如果 n 是奇数，则对某个整数 k 有 $n=2k+1$。因此 $\lfloor n/2\rfloor=\lfloor k+1/2\rfloor=k=(n-1)/2$。

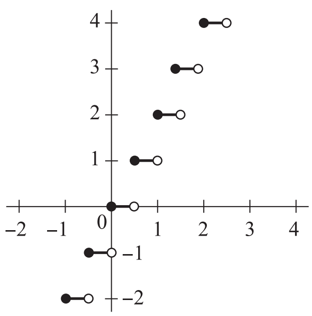
27. 假定 $x\geqslant 0$。等式左边是 $\lceil -x\rceil$ 而右边是 $-\lfloor x\rfloor$。如果 x 是整数，则两边都等于 $-x$。否则，令 $x=n+\varepsilon$，其中 n 为自然数而 ε 为实数且满足 $0\leqslant\varepsilon<1$。则有 $\lceil -x\rceil=\lceil -n-\varepsilon\rceil=-n$ 和 $-\lfloor x\rfloor=-\lfloor n+\varepsilon\rfloor=-n$。当 $x<0$ 时等式依然成立，因为只需用 $-x$ 代替 x 即可得。

28. $\lceil b\rceil-\lfloor a\rfloor-1$

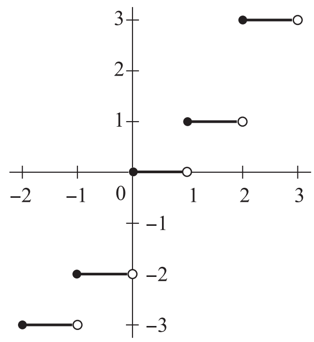
29. a)1　　b)3　　c)126　　d)3600

30. a)100　　b)256　　c)1030　　d)30 200

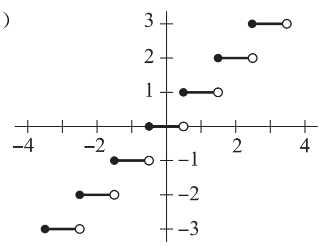
31.



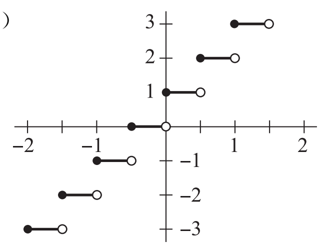
32.



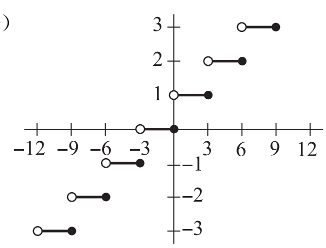
33. a)



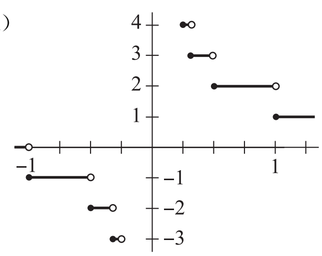
b)



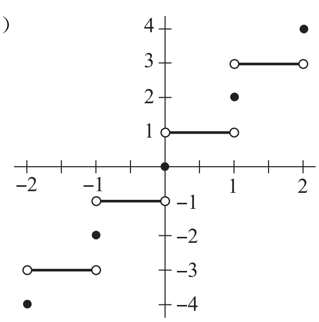
c)



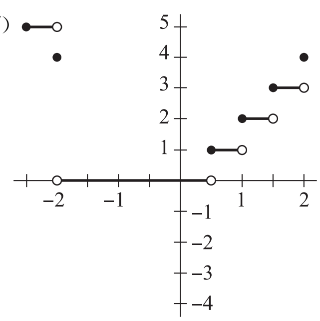
d)



e)



f)



g)见 a)

34. $f^{-1}(y)=(y-1)^{1/3}$

35. a) $f_{A\cap B}(x)=1\leftrightarrow x\in A\cap B\leftrightarrow x\in A$ 且 $x\in B\leftrightarrow f_A(x)=1$ 且 $f_B(x)=1\leftrightarrow f_A(x)f_B(x)=1$

b) $f_{A\cup B}(x)=1\leftrightarrow x\in A\cup B\leftrightarrow x\in A$ 或 $x\in B\leftrightarrow f_A(x)=1$ 或 $f_B(x)=1\leftrightarrow f_A(x)+f_B(x)-f_A(x)f_B(x)=1$

c) $f_{\overline{A}}(x)=1\leftrightarrow x\in\overline{A}\leftrightarrow x\notin A\leftrightarrow f_A(x)=0\leftrightarrow 1-f_A(x)=1$

d) $f_{A\oplus B}(x)=1\leftrightarrow x\in A\oplus B\leftrightarrow(x\in A$ 且 $x\notin B)$或$(x\notin A$ 且 $x\in B)\leftrightarrow f_A(x)+f_B(x)-2f_A(x)f_B(x)=1$

36. a)真；因为$\lfloor x\rfloor$已经是整数，$\lceil\lfloor x\rfloor\rceil=\lfloor x\rfloor$。

b)假；$x=1/2$ 就是一个反例。

c)真；如果 x 或 y 是整数，则由表 1 的性质 $4b$，差为 0。如果 x 和 y 都不是整数，则 $x=n+\varepsilon$ 且 $y=m+\delta$，其中 n 和 m 是整数，而 ε 和 δ 是小于 1 的正实数。则 $m+n<x+y<m+n+2$，因此 $\lceil x+y\rceil$ 或者为 $m+n+1$，或者为 $m+n+2$。所以，给定的表达式或者为$(n+1)+(m+1)-(m+n+1)=1$，或者为$(n+1)+(m+1)-(m+n+2)=0$。

d)假；$x=1/4$ 和 $y=3$ 就是一个反例。

e)假；$x=1/2$ 就是一个反例。

37. a)如果 x 是正整数，则两边相等。因此假定 $x=n^2+m+\varepsilon$，其中 n^2 是小于 x 的最大完全平方数，m 是非负整数，$0<\varepsilon\leqslant 1$。则$\sqrt{x}$和$\sqrt{\lfloor x\rfloor}=\sqrt{n^2+m}$均在 $n\sim n+1$ 之间，因此两边均等于 n。

b)如果 x 是正整数，则两边相等。因此假定 $x=n^2-m-\varepsilon$，其中 n^2 是大于 x 的最小完全平方数，m 是非负整数，$0<\varepsilon\leqslant 1$。则$\sqrt{x}$和$\sqrt{\lceil x\rceil}=\sqrt{n^2-m}$均在 $n-1\sim n$ 之间。所以等式两边都等于 n。

38. a)定义域是 **Z**；陪域是 **R**；定义的区域是非零整数集；f 未定义的区域是$\{0\}$；不是全函数。

b)定义域是 **Z**；陪域是 **Z**；定义的区域是 **Z**；f 未定义的区域是$\varnothing$；全函数。

c)定义域是 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$；陪域是 **Q**；定义的区域是 $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$；$f$ 未定义的区域是 $\mathbf{Z}\times\{0\}$；不是全函数。

d)定义域是 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$；陪域是 **Z**；定义的区域是 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$；$f$ 未定义的区域是$\varnothing$；全函数。

e)定义域是 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$；陪域是 **Z**；定义的区域是$\{(m,n)\mid m>n\}$；$f$ 未定义的区域是$\{(m,n)\mid m\leqslant n\}$；不是全函数。

39. a)由定义可知，如果说 S 的基数为 m 就是说 S 有 m 个不同的元素。因此，我们给第 1 个对象赋值 1，第 2 个赋值 2，等等。这就是一个一一对应。

b)由 a)可知，存在一个从 S 到$\{1,2,\cdots,m\}$的双射函数 f 和一个从 T 到$\{1,2,\cdots,m\}$的双射函数 g。则合成函数 $g^{-1}\circ f$ 就是所期望的从 S 到 T 的双射函数。

2.4 节

1. a)3　　b)−1　　c)787　　d)2639

2. a) $a_0=2$，$a_1=3$，$a_2=5$，$a_3=9$

b) $a_0=1$，$a_1=4$，$a_2=27$，$a_3=256$

c) $a_0=0$，$a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=1$

d) $a_0=0$，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$

3. a)2，5，8，11，14，17，20，23，26，29

b)1，1，1，2，2，2，3，3，3，4

c)1，1，3，3，5，5，7，7，9，9

d)−1，−2，−2，8，88，656，4912，40 064，362 368，3 627 776

e)3，6，12，24，48，96，192，384，768，1536

f)2，4，6，10，16，26，42，68，110，178

g)1，2，2，3，3，3，3，4，4，4

h)3，3，5，4，4，3，5，5，4，3

4. 每一项都是前一项的 2 倍；第 n 项可以由前一项加 $n-1$ 得到；每项都是正整数，但不是 3 的倍数；存在无限多种可能。

5. a)2，12，72，432，2592　　b)2，4，16，256，65 536

c)1，2，5，11，26　　d)1，1，6，27，204

e)1，2，0，1，3

6. a)6，17，49，143，421

b)$49=5\cdot17-6\cdot6$，$143=5\cdot49-6\cdot17$，$421=5\cdot143-6\cdot49$

c)$5a_{n-1}-6a_{n-2}=5(2^{n-1}+5\cdot3^{n-1})-6(2^{n-2}+5\cdot3^{n-2})=2^{n-2}(10-6)+3^{n-2}(75-30)=2^{n-2}\cdot4+3^{n-2}\cdot9\cdot5=2^n+3^n\cdot5=a_n$

7. a)是　b)否　c)否　d)是

e)是　f)是　g)否　h)否

8. a)$a_{n-1}+2a_{n-2}+2n-9=-(n-1)+2+2[-(n-2)+2]+2n-9=-n+2=a_n$

b)$a_{n-1}+2a_{n-2}+2n-9=5(-1)^{n-1}-(n-1)+2+2[5(-1)^{n-2}-(n-2)+2]+2n-9=5(-1)^{n-2}(-1+2)-n+2=a_n$

c)$a_{n-1}+2a_{n-2}+2n-9=3(-1)^{n-1}+2^{n-1}-(n-1)+2+2[3(-1)^{n-2}+2^{n-2}-(n-2)+2]+2n-9=3(-1)^{n-2}(-1+2)+2^{n-2}(2+2)-n+2=a_n$

d)$a_{n-1}+2a_{n-2}+2n-9=7\cdot2^{n-1}-(n-1)+2+2[7\cdot2^{n-2}-(n-2)+2]+2n-9=2^{n-2}(7\cdot2+2\cdot7)-n+2=a_n$

9. a)$a_n=2\cdot3^n$　b)$a_n=2n+3$　c)$a_n=1+n(n+1)/2$　d)$a_n=n^2+4n+4$

e)$a_n=1$　f)$a_n=(3^{n+1}-1)/2$　g)$a_n=5n!$　h)$a_n=2^n n!$

10. a)$a_n=3a_{n-1}$　b)5 904 900

11. a)$a_n=n+a_{n-1}$，$a_0=0$　b)$a_{12}=78$

c)$a_n=n(n+1)/2$

12. $B(k)=[1+(0.07/12)]B(k-1)-100$，初始值 $B(0)=5000$。

13. a)一个 1 和一个 0，后面跟两个 1 和两个 0，然后接三个 1 和三个 0，等等；1，1，1

b)以升序排列正整数，且每个偶正整数出现 2 次；9，10，10

c)奇数项是都是 2 的连续的幂次；偶数项都是 0；32，0，64

d)$a_n=3\cdot2^{n-1}$；384，768，1536

e)$a_n=15-7(n-1)=22-7n$；-34，-41，-48

f)$a_n=(n^2+n+4)/2$；57，68，80

g)$a_n=2n^3$；1024，1458，2000

h)$a_n=n!+1$；362 881，3 628 801，39 916 801

14. 在从 1，2，…，a_n 的所有整数中，a_n 是第 n 个正整数但不是一个完全平方。非平方是 a_1，a_2，…，a_n，平方项是 1^2，2^2，…，k^2，其中 k 是整数且满足 $k^2<n+k<(k+1)^2$。因此，$a_n=n+k$ 满足 $k^2<a_n<(k+1)^2$。为了寻找 k，首先注意 $k^2<n+k<(k+1)^2$，所以 $k^2+1\leqslant n+k\leqslant(k+1)^2-1$。所以，$(k-1/2)^2+3/4=k^2-k+1\leqslant n\leqslant k^2+k=(k+1/2)^2-1/4$。从而可得 $k-1/2<\sqrt{n}<k+1/2$，所以 $k=\{n\}$并且 $a_n=n+k=n+\{\sqrt{n}\}$。

15. a)20　b)11　c)30　d)511

16. a)1533　b)510　c)4923　d)9842

17. a)21　b)78　c)18　d)18

18. $\sum_{j=1}^{n}(a_j-a_{j-1})=a_n-a_0$

19. a)n^2　b)$n(n+1)/2$

20. 15 150

21. $\frac{n(n+1)(2n+2)}{3}+\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)(m-(n+1)^2+1)$，其中 $n=\lfloor\sqrt{m}\rfloor-1$

22. a)0　b)1680　c)1　d)1024

23. 34

2.5 节

1. a)可数无限，-1，-2，-3，-4，…

b)可数无限，0，2，-2，4，-4，…

c)可数无限，99，98，97，…

d)不可数

e)有限

f)可数，0，7，-7，14，-14，…

2. a)可数。把 n 和 n 个 1 组成的位串相对应。

b)可数。为了找到一个对应关系，参照例 4 中的步骤，但是去掉前三行中的分数(同时继续去掉非简分数)。

c)不可数

d)不可数

3. 假设饭店客满时来了 m 为新客人。对于 $n=1$，2，3…，将 n 号房间的客人安排到 $n+m$ 号房间；然后新客人安排到 $1\sim m$ 号房间。

4. 对于 $n=1$，2，3…，将现住 $2n$ 号房间的客人安排到 n 号房间，而将现住 $2n-1$ 号房间的客人安排到新楼的 n 号房间。

5. 对于 $i=1$，2，3…，将现住 i 号房间的客人安排到 $2i+1$ 号房间。将第 k 辆巴士的第 j 位客人安排到 $2^k(2j+1)$号房间。

6. a)$A=[1, 2]$(1～2 的实数的闭区间)，$B=[3, 4]$

b)$A=[1, 2]\cup\mathbf{Z}^+$，$B=[3, 4]\cup\mathbf{Z}^+$

c)$A=[1, 3]$，$B=[2, 4]$

7. 假设 A 是可数的。则或者 A 具有基数 n，n 为非负整数，在此情形下存在从 A 到 $\mathbf{Z}^+$ 的子集的一对一映射(值域是前 n 个正整数)；或者存在从 A 到 $\mathbf{Z}^+$ 的一一对应 f。无论哪种情形都满足定义 2。反之，假设 $|A|\leqslant|\mathbf{Z}^+|$。由定义，这意味着存在从 A 到 $\mathbf{Z}^+$ 的一对一函数，所以 A 与 $\mathbf{Z}^+$(即那个函数的值域)的一个子集具有相同的基数。因此，A 是可数的。

8. 假设 B 是可数的。则 B 的元素可以列表为 b_1，b_2，b_3，…。因为 A 是 B 的一个子集，所以取$\{b_n\}$的子序列使其只包含 A 中的所有项，即构成 A 中元素的一个列表。因为 A 是不可数的，所以这不可能发生。

9. 假设 $A-B$ 是可数集。则因为 $A=(A-B)\cup A\cap B$，所以可以通过交替列出 $A-B$ 的元素与 $A\cap B$ 的元素而将 A 的元素排列成序列。而这与 A 的不可数性相矛盾。

10. 给定由 A 到 B 的双射函数 f，由 C 到 D 的双射函数 g。则从 $A\times C$ 到 $B\times D$ 的将(a, c)映射到$(f(a), g(c))$的函数是一个双射函数。

11. 由$|A|\leqslant|B|$的定义，存在一个从 A 到 B 的一对一函数 $f: A\to B$。类似地，存在一个从 B 到 C 的一对一函数 $g: B\to C$。由 2.2 节练习 17 可知，复合函数 $g\circ f$：$A\to C$ 是一对一的。所以由定义可得$|A|\leqslant|C|$。

12. 利用集合论的选择公理，每次选择一个不同的元素 a_1，a_2，a_3，…(因为 A 是无限的，所以这是可以做到的)。这个结果的集合$\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$就是所要求的 A 的无限子集。

13. 一个有限字母表上的字符的有限字符串的集合是可数无限的，因为我们可以根据长度按字典序列出这些字符串。所以无限集 S 可以用这个可数集(由练习 16 可知这是无限可数集)的一个无限子集来标记。

14. 假设 A_1，A_2，A_3，…是可数集。由于 A_i 是可数的，所以可以把其元素排列成序列 a_{i1}，a_{i2}，a_{i3}，…。集合 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 中的元素也可以通过列出满足 $i+j=2$ 的所有 a_{ij}、满足 $i+j=3$ 的所有 a_{ij}、满足 $i+j=4$ 的所有 a_{ij}，等等，排列出来。

15. 存在有限多个长度为 m 的位串，即 2^m。所有位串的集合是长度为 m 的位串集合的并集，其中 $m=0$，1，2，…。由于可数多个可数集合的并集仍然是可数的(参见练习 14)，所以存在可数的多个位串。

16. 显然，对于固定的 $m+n$ 值，比如 $m+n=x$，由公式可知函数的取值范围是从$(x-2)(x-1)/2+1$ 到$(x-2)(x-1)/2+(x-1)$，因为在这些条件下 m 的取值可假设为 1，2，3，…，$(x-1)$，而当 $m+n$ 固定时公式中的第一项是一个固定的正整数。要证明这个函数是一对一和映上的，我们只需要证明

$x+1$ 的取值范围恰好是 x 所剩下值的范围，即 $f(x-1, 1)+1=f(1, x)$。我们有 $f(x-1, 1)+1=(x-2)(x-1)/2+(x-1)+1=(x^2-x+2)/2=(x-1)x/2+1=f(1, x)$。

17. 由 Schröder-Bernstein 定理可知，只要找到一对一函数 f：$(0, 1)\to[0, 1]$和 g：$[0, 1]\to(0, 1)$即可。令 $f(x)=x$ 且 $g(x)=(x+1)/3$。

18. 正整数集合的幂集的每个元素 A(即 $A\subseteq\mathbf{Z}^+$)都可以唯一地表示成位串 $a_1a_2a_3\cdots$，其中 $a_i=1$ 如果 $i\in A$，$a_i=0$ 如果 $i\notin A$。假设存在一个一一对应 f：$\mathbf{Z}^+\to\mathcal{P}(\mathbf{Z}^+)$。通过令 s_i 为 1 减去 $f(i)$的第 i 位，可以构造一个新的位串 $s=s_1s_2s_3\cdots$。则因为 s 在第 i 位不同于 $f(i)$，所以 s 不在 f 的值域中，矛盾。

19. 对于任意有限字母表，都存在有限多个长度为 n 的字符串，其中 n 为正整数。由练习 14 的结果可知任意给定的有限字母表，只存在可数个字符串。因为一种特定语言的所有计算机程序的集合是有限字母表的所有字符串集合的子集，所以也是一个可数集。

20. 只存在可数个计算机程序。因此，只存在可数个可计算函数。因为存在不可数个函数，所以并不是所有的函数都是可计算的。

2.6 节

1. a)3×4 b)$\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}$ c)$[2\quad 0\quad 4\quad 6]$ d)1 e)$\begin{bmatrix}1&2&1\\1&0&1\\1&4&3\\3&6&7\end{bmatrix}$

2. a)$\begin{bmatrix}1&11\\2&18\end{bmatrix}$ b)$\begin{bmatrix}2&-2&-3\\1&0&2\\9&-4&4\end{bmatrix}$ c)$\begin{bmatrix}-4&15&-4&1\\-3&10&2&-3\\0&2&-8&6\\1&-8&18&-13\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix}9/5&-6/5\\-1/5&4/5\end{bmatrix}$

4. $\mathbf{0}+\boldsymbol{A}=[0+a_{ij}]=[a_{ij}+0]=\mathbf{0}+\boldsymbol{A}$

5. $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]=[(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$

6. $\boldsymbol{A}$ 的行数等于 $\boldsymbol{B}$ 的列数，$\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数。

7. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=\left[\sum_q a_{iq}\left(\sum_r b_{qr}c_{rl}\right)\right]=\left[\sum_q\sum_r a_{iq}b_{qr}c_{rl}\right]=\left[\sum_r\sum_q a_{iq}b_{qr}c_{rl}\right]=\left[\sum_r\left(\sum_q a_{iq}b_{qr}\right)c_{rl}\right]=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$

8. $\boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix}1&n\\0&1\end{bmatrix}$

9. a)令 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$和 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$。则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}+b_{ij}]$。我们有$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=[a_{ji}+b_{ji}]=[a_{ji}]+[b_{ji}]=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$。
b)利用 a)中相同的记号，我们有 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\left[\sum_q b_{qi}a_{jq}\right]=\left[\sum_q a_{jq}b_{qi}\right]=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$，因为$(i, j)$元素正好是 $\boldsymbol{AB}$ 的(j, i)元素。

10. 因为$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ad-bc&0\\0&ad-bc\end{bmatrix}=(ad-bc)\boldsymbol{I}_2=\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，所以可得结论。

11. 由结合律可知，$\boldsymbol{A}^n(\boldsymbol{A}-1)^n=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\cdots(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{AA}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1})\cdots\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}$。因为 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$，由里到外可得 $\boldsymbol{A}^n(\boldsymbol{A}^{-1})^n=\boldsymbol{I}$。类似地，$(\boldsymbol{A}^{-1})^n\boldsymbol{A}^n=I$。所以$(\boldsymbol{A}^n)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^n$。

12. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的(i, j)元素是 $a_{ij}+a_{ji}$，这等于 $a_{ji}+a_{ij}$，即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的(j, i)元素，所以根据定义 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是对称的。

13. a)$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$ b)$\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ c)$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$

14. a)$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ b)$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ c)$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

15. a)$\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}=[a_{ij}\vee b_{ij}]=[b_{ij}\vee a_{ij}]=\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{A}$

b)$\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}=[a_{ij}\wedge b_{ij}]=[b_{ij}\wedge a_{ij}]=\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{A}$

16. a)$\boldsymbol{A}\vee(\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{C})=[a_{ij}]\vee[b_{ij}\wedge c_{ij}]=[a_{ij}\vee(b_{ij}\wedge c_{ij})]=[(a_{ij}\vee b_{ij})\wedge(a_{ij}\vee c_{ij})]=[a_{ij}\vee b_{ij}]\wedge[a_{ij}\vee c_{ij}]=(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B})\wedge(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{C})$

b)$\boldsymbol{A}\wedge(\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{C})=[a_{ij}]\wedge[b_{ij}\vee c_{ij}]=[a_{ij}\wedge(b_{ij}\vee c_{ij})]=[(a_{ij}\wedge b_{ij})\vee(a_{ij}\wedge c_{ij})]=[a_{ij}\wedge b_{ij}]\vee[a_{ij}\wedge c_{ij}]=(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\vee(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{C})$

17. $\boldsymbol{A}\odot(\boldsymbol{B}\odot\boldsymbol{C})=[\vee_q a_{iq}\wedge(\vee_r(b_{qr}\wedge c_{rl})]=[\vee_q\vee_r(a_{iq}\wedge b_{qr}\wedge c_{rl})]=[\vee_r\vee_q(a_{iq}\wedge b_{qr}\wedge c_{rl})]=[\vee_r(\vee_q(a_{iq}\wedge b_{qr}))\wedge c_{rl}]=(\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B})\odot\boldsymbol{C}$

补充练习

1. a)$\overline{A}$ b)$A\cap B$ c)$A-B$ d)$\overline{A}\cap\overline{B}$ e)$A\oplus B$

3. 是

5. $A-(A-B)=A-(A\cap\overline{B})=A\cap\overline{(A\cap\overline{B})}=A\cap(\overline{A}\cup B)=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$

7. 令 $A=\{1\}$，$B=\varnothing$，$C=\{1\}$。则$(A-B)-C=\varnothing$，但 $A-(B-C)=\{1\}$。

9. 不是。例如，令 $A=B=\{a, b\}$，$C=\varnothing$，$D=\{a\}$，则$(A-B)-(C-D)=\varnothing-\varnothing=\varnothing$，但是$(A-C)-(B-D)=\{a, b\}-\{b\}=\{a\}$。

11. a)$|\varnothing|\leqslant|A\cap B|\leqslant|A|\leqslant|A\cup B|\leqslant|U|$

b)$|\varnothing|\leqslant|A-B|\leqslant|A\oplus B|\leqslant|A\cup B|\leqslant|A|+|B|$

13. a)是，不是

b)是，不是

c)f 有逆函数是 $f^{-1}(a)=3$，$f^{-1}(b)=4$，$f^{-1}(c)=2$，$f^{-1}(d)=1$；g 没有逆函数。

15. 如果 f 是一对一函数，则 f 给出了一个 S 和 $f(S)$之间的一个双射函数，所以它们具有相同的基数。如果 f 不是一对一函数，则存在 S 中元素 x 和 y 使得 $f(x)=f(y)$。令 $S=\{x, y\}$。则$|S|=2$，但$|f(S)|=1$。

17. 令 $x\in A$。则 $S_f(\{x\})=\{f(y)\mid y\in\{x\}\}=\{f(x)\}$。同理可得 $S_g(\{x\})=\{g(x)\}$。因为 $S_f=S_g$，所以可以得出$\{f(x)\}=\{g(x)\}$，因此必然可得 $f(x)=g(x)$。

19. 等式为真当且仅当 x 和 y 的小数部分之和小于 1。

21. 等式为真当且仅当要么 x 和 y 都是整数，要么 x 不是整数但 x 和 y 的小数部分之和小于等于 1。

23. 如果 x 是整数，则$\lfloor x\rfloor+\lfloor m-x\rfloor=x+m-x=m$。否则，把 x 表示成它的整数部分和小数部分：$x=n+\varepsilon$，其中 $n=\lfloor x\rfloor$且 $0<\varepsilon<1$。在此情形下，$\lfloor x\rfloor+\lfloor m-x\rfloor=\lfloor n+\varepsilon\rfloor+\lfloor m-n-\varepsilon\rfloor=n+m-n-1=m-1$。

25. 存在某个整数 k 使得 $n=2k+1$。则 $n^2=4k^2+4k+1$，$n^2/4=k^2+k+1/4$。所以$\lceil n^2/4\rceil=k^2+k+1$。但是，$(n^2+3)/4=(4k^2+4k+1+3)/4=k^2+k+1$。

27. 令 $x=n+(r/m)+\varepsilon$，其中 n 是整数，r 是小于 m 的非负整数，而 ε 是实数且满足 $0\leqslant\varepsilon<1/m$。左边是$\lfloor nm+r+m\varepsilon\rfloor=nm+r$。在右边，从$\lfloor x\rfloor$项到$\lfloor x+(m+r-1)/m\rfloor$项均为 n，而从$\lfloor x+(m-r)/m\rfloor$起均为 $n+1$。所以，右式为$(m-r)n+r(n+1)=nm+r$。

29. 101

31. $a_1=1$；对于所有的 $n>0$ 有 $a_{2n+1}=n\cdot a_{2n}$，对于所有的 $n>0$ 有 $a_{2n}=n+a_{2n-1}$。接下来的 4 项是 5346，5353，37 471，37 479。

33. 如果每个 $f^{-1}(j)$都是可数的，则 $S=f^{-1}(1)\cup f^{-1}(2)\cup\cdots$是可数个可数集的并集，从而由 2.5 节练习 14 可知它也是可数的。

35. 因为在 R 与开区间(0，1)之间存在一个一一对应(可由 $f(x)=2\arctan(x)/\pi$ 给出)，所以只要证明$|(0, 1)\times(0, 1)|=|(0, 1)|$即可。根据 Schröder-Bernstein 定理，只需要找到内射函数 f：$(0, 1)\to(0, 1)\times(0, 1)$和 g：$(0, 1)\times(0, 1)\to(0, 1)$即可。令 $f(x)=(x, 1/2)$。对于函数 g，参考提示。假设$(x, y)\in(0, 1)\times(0, 1)$，用十进制展开式来表示 x 和 y，$x=0.x_1x_2x_3\cdots$和 $y=0.y_1y_2y_3\cdots$，任何数的展开式不要选择以无限循环的 9 作为结尾。令 $g(x, y)$是通过交织着两个串获得的十进制展开式，即 $0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\cdots$。

37. 对于 $n\geqslant0$，$\boldsymbol{A}^{4n}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{4n+1}=\begin{bmatrix}0&0\\-1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{4n+2}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{4n+3}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$。

39. 假设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$。令 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$。因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，所以可得 $c=0$ 和 $a=d$。令 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$。因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，所以可得 $b=0$。因此，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}=a\boldsymbol{I}$。

41. a) Let $\mathbf{A}\odot\mathbf{0}=[b_{ij}]$。则 $b_{ij}=(a_{i1}\wedge 0)\vee\cdots\vee(a_{ip}\wedge 0)=0$。因此，$\mathbf{A}\odot\mathbf{0}=\mathbf{0}$。类似地，$\mathbf{0}\odot\mathbf{A}=\mathbf{0}$。
b) $\mathbf{A}\vee\mathbf{0}=[a_{ij}\vee 0]=[a_{ij}]=\mathbf{A}$。因此，$\mathbf{A}\vee\mathbf{0}=\mathbf{A}$。类似地，$\mathbf{0}\vee\mathbf{A}=\mathbf{A}$。
c) $\mathbf{A}\wedge\mathbf{0}=[a_{ij}\wedge 0]=[0]=\mathbf{0}$。因此，$\mathbf{A}\wedge\mathbf{0}=\mathbf{0}$。类似地，$\mathbf{0}\wedge\mathbf{A}=\mathbf{0}$。

第 3 章

3.1 节

1. a) 5850　b) 343
2. a) 4^{10}　b) 5^{10}
3. 42
4. 26^3
5. 676
6. 2^8
7. $n+1$(包含空字符串)
8. 475 255(包含空字符串)
9. 1 321 368 961
10. a) 729　b) 256　c) 1024　d) 64
11. a) 7：56，63，70，77，84，91，98　b) 5：55，66，77，88，99　c) 1：77
12. a) 128　b) 450　c) 9　d) 675　e) 450
f) 450　g) 225　h) 75
13. a) 990　b) 500　c) 27
14. 3^{50}
15. 52 457 600
16. 20 077 200
17. a) 37 822 859 361　b) 8 204 716 800　c) 40 159 050 880　d) 12 113 640 000
e) 171 004 205 215　f) 72 043 541 640　g) 6 230 721 635　h) 223 149 655
18. a) 0　b) 120　c) 720　d) 2520
19. a) 2，如果 $n=1$；2，如果 $n=2$；0，如果 $n\geqslant 3$　b) 2^{n-2} $(n>1)$；1，如果 $n=1$　c) $2(n-1)$
20. $(n+1)^m$
21. 如果 n 是偶数，$2^{n/2}$　如果 n 是奇数，$2^{(n+1)/2}$
22. a) 175　b) 248　c) 232　d) 84
23. 60
24. a) 240　b) 480　c) 360
25. 352
26. 147
27. 33
28. a) 9 920 671 339 261 325 541 376 $\approx 9.9\times 10^{21}$
b) 6 641 514 961 387 068 437 760 $\approx 6.6\times 10^{21}$
c) 约为 314 000 年
29. $54(64^{65536}-1)/63$
30. 7 104 000 000 000
31. $16^{10}+16^{26}+16^{58}$
32. 666 667
33. 18

34. 17
35. 22
36. 设 $P(m)$ 为 m 个任务的求和法则。第一步令 $m=2$，这时 $P(m)$ 为两个任务的求和法则，现假设 $P(m)$ 成立。考虑 $m+1$ 个任务，T_1，T_2，…，T_m，T_{m+1}，这些任务分别可以用 n_1，n_2，…，n_m，n_{m+1} 种方法完成，并且不能在同一时间做两个任务。为了完成其中一个任务，我们可以选择前 m 个任务中的一个，或者选择第 $m+1$ 个任务。根据两个任务的求和法则，完成其中一个任务的方法数就是计算前 m 个任务中的一个 n_m 与第 $m+1$ 个任务的 n_{m+1} 求和。根据数学归纳法，得出 m 个任务的求和法则是 $n_1+n_2+\cdots+n_m+n_{m+1}$。
37. $n(n-3)/2$

3.2 节

1. 由于有 6 种课程，只有 5 个工作日，所以根据鸽巢原理，至少有两门课要安排在同一天。
2. a)3　　b)14
3. 由于一个数被 4 除后可能会产生 4 种余数，鸽巢原理表明，5 个整数中，至少有两个整数被 4 除后余数相等。
4. 令 a，$a+1$，…，$a+n-1$ 为一组连续的正整数序列。由于当 $0\leqslant k<j\leqslant n-1$ 时，$0<(a+j)-(a+k)$，所以整数 $(a+i)\ \mathbf{mod}\ n(i=0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 互不相同。由于 $(a+i)\ \mathbf{mod}\ n$ 会产生 n 个不同的值，并且在序列中只有 n 个不同的正整数，所以这些正整数恰好只能被取出一次。所以该正整数序列中恰好存在一个整数能够被 n 整除。
5. 4951
6. (a, b, c) 与 (d, e, f) 连线的中点坐标为 $((a+d)/2, (b+e)/2, (c+f)/2)$。如果要使该中点坐标为整数，则必须要求 a 与 d，b 与 e，c 与 f 的奇偶性相同。由于该中点坐标可能有 8 种奇偶组合(比如(偶数，奇数，偶数))，所以根据鸽巢原理，9 个点中至少有 2 个点会形成相同的奇偶组合，这两个点连线的中点坐标一定是整数。
7. a)将这 8 个正整数分成 4 个子集，每个子集有两个数，并且每组的两个数之和为 9：$\{1, 8\}$，$\{2, 7\}$，$\{3, 6\}$，$\{4, 5\}$。如果在这 8 个数中选择 5 个，那么根据鸽巢原理，至少有两个数是来自同一个子集，而这两个数的和一定为 9。
   b)不为真。例如取 $\{1, 2, 3, 4\}$。
8. 4
9. 21 251
10. a)如果一年级、二年级、三年级的人数都少于 9 个，则每个年级的人数是不少于 8 个的，这样三个年级的总人数最多只有 24 人，与事实上的 25 个人矛盾，所以这三个年级中至少有一个年级的人数不少于 9.
    b)如果一年级的人数少于 3 个、二年级的人数少于 19 个、三年级的人数少于 5 个，那么最多会有 2 个人是一年级、18 个人是二年级、4 个人是三年级，这样总人数是 24，与事实的 25 个人矛盾。
11. 4，3，2，1，8，7，6，5，12，11，10，9，16，15，14，13
12. 将圆桌的座位从 1～50 进行编号，50 号座位与 1 号座位相邻。有 25 个奇数号座位，25 个偶数号座位。如果最多有 12 个男生获得了奇数号座位，那么至少有 13 个男生获得偶数号座位，反之依然。一般地，假设至少有 13 个男生获得了 25 个奇数座位中的一些位置，那么这些男生中至少有两个会获得连续的奇数号，这样坐在他们中间的人就会是左右都与一个男生相邻。
13.
```
procedure long(a, …, a: 正整数)
{首先查找最长的增序子序列}
max := 0; set := 00…00{n 位}
for i := 1 to 2^n
 last := 0; count := 0, OK := true;
 for j := 1 to n
  if set(j) = 1 then
   if a_j > last then last := a_j
```

```
      count := count+1;
      else OK := false
    if count>max then
      max := count
      best := set
    set := set+1;（二进制加法）
  {max 是长度，best 是表明序列位置}
  {通过改变 a_j<last 代替 a_j>last 并且 last :=∞代替 last :=0 来变为递减子序列}
```

14. 根据对称性，我们只需要证明第一个陈述即可。令 A 是其中的一个人，那么在剩余的 9 个人中，A 或者有至少 4 个朋友，或者至少有 6 个敌人(因为 $3+5<9$)。假设在第一种情况下，B、C、D 和 E 都是 A 的朋友。如果他们之间任意两个人也都是朋友，那么我们会得到 3 个彼此是朋友的组合。否则$\{B, C, D, E\}$会是一个有 4 个彼此是敌人的集合。在第二种情况下，令$\{B, C, D, E, F, G\}$是 A 的敌人的集合。根据例 11，B、C、D、E、F、G 中有 3 个彼此是敌人或者是朋友的组合，构成了 A 的 4 个敌人的集合。
15. 这里需要证明两件事。如果我们有一个由 n 个人组成的集合，那么在他们中间我们必须找到或者是一对朋友，或者是 n 个人中彼此都是敌人的子集。但是只存在一个 $n-1$ 个人组成的集合，为此这是不可能的。对于第一个陈述，如果有任意一对朋友，那么条件成立，如果不存在一对朋友，那么 n 个人的集合中每一对组合都是彼此为敌人，所以满足第二个条件。对于第二个陈述，如果我们有一个 $n-1$ 个人构成的集合，集合中任意两个人彼此都是敌人，那么既不会有一对朋友，也不会存在 n 个彼此都是敌人的子集。
16. 3 个缩写字母以及不同生日的组合共有 6 432 816 种可能，所以根据广义的鸽巢原理，至少有 $\lceil 37\ 000\ 000/6\ 432\ 816 \rceil=6$ 个人拥有同样的 3 个缩写字母与生日。
17. 因为 $800\ 001>200\ 000$，根据鸽巢原理可知，至少有 2 个巴黎人拥有同样数量的头发。广义鸽巢原理保证至少有$\lceil 800\ 001/200\ 000 \rceil=5$ 个巴黎人拥有同样数量的头发。
18. 18
19. 由于有 6 台计算机，所以其中一台计算机被连接到其他计算机的数量可能为 0～5。然而 0 和 5 不能共同发生。即一台计算机如果没有连接其他任何一台计算机，那么不会存在一台计算机同时连接其他所有 5 台计算机的情况；如果有一台计算机连接到了其他所有 5 台计算机时，那么不会存在一台计算机没有连接任何计算机的情况。根据鸽巢原理，由于一台计算机连接到其他计算机的数量最多只有 5 种可能，所以在这 6 台计算机中至少有两台计算机连接到其他计算机的数量相同。
20. 对计算机做标记，从 C_1 到 C_{100}，对打印机做标记，从 P_1 到 P_{20}。如果我们把计算机 C_k 连接到打印机 P_k 上，其中 $k=1, 2, \cdots, 20$，然后将 C_{21} 到 C_{100} 分别连接到所有的打印机上，那么我们用了 $20+80\times20=1620$ 根电缆。显然这是足够的，因为如果计算机 C_1 到 C_{20} 需要用打印机，那么它们就可以用有同样标签号的打印机，如果其他标签号比这 20 台高的计算机需要用打印机，它们可以用目前没有被使用的打印机，因为它们连接到了所有的打印机上。现在我们必须证明 1619 根电缆是不足够的。因为 20 部打印机与 1619 根电缆，平均每部打印机连接的计算机数是 1619/20，少于 81。因此一部分打印机连接的计算机数量肯定是小于 81 台。这就意味着它可能会连接了 80 台或者更少的计算机，所以有 20 台计算机没有连接到它。如果这 20 台计算机同时都需要使用打印机，那么它们将不会全部得到满足，因为它们最多只连接到了其他的 19 部打印机。
21. 令 a_i 表示比赛完成的小时数。那么有 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{75}\leqslant125$。同样有 $25\leqslant a_1+24<a_2+24<\cdots<a_{75}+24\leqslant149$。共有 150 个数，$a_1, \cdots, a_{75}, a_1+24, \cdots, a_{75}+24$。根据鸽巢原理，至少有 2 个数是相等的。因为所有的 a_i 都是不同的，所有的 a_i+24 也是不同的，有 $a_i=a_j+24(i>j)$。因此，在第$(j+1)$到第 i 小时这段时间内，恰巧有 24 场比赛。
22. 应用广义鸽巢原理，将 $|S|$ 个物体 $f(s)(s\in S)$放置在 $|T|$ 个箱子中，每个箱子对应 T 中的一个元素。
23. 令 d_j 为 $jx-N(jx)$，$N(jx)$表示接近 jx 的整数($1\leqslant j\leqslant n$)。每个 d_j 都是一个介于 $-1/2$～$1/2$ 之间的无理数。我们假设 n 是偶数。当 n 是奇数的情况比较散乱。考虑 n 个区间$\{x \mid j/n<x<(j+1)/n\}$，$\{x \mid -(j+1)/n<x<-j/n\}$，其中 $j=0, 1, \cdots, (n/2)-1$。如果 d_j 属于区间$\{x \mid 0<x<1/n\}$或者

区间$\{x \mid -1/n<x<0\}$，对于某些j，证明结束。如果不是，因为有$n-2$个区间与n个d_j，所以根据鸽巢原理有一个区间$\{x \mid (k-1)/n<x<k/n\}$包含d_r和$d_s(r<s)$。通过表明$(s-r)x$在$1/n$范围内即可证明完毕。

24. a)假设$i_k \leqslant n$。然后根据广义鸽巢原理，至少有$\lceil (n^2+1)/n \rceil = n+1$个数字$i_1$，$i_2$，…，$i_{n^2+1}$相等。
   b)如果$a_{k_j}<a_{k_{j+1}}$，那么包含a_{k_j}的子序列被长度为i_{k+1}以$a_{k_{j+1}}$开头的递增子序列跟随，这样与$i_{k_j}=i_{k_{j+1}}$矛盾。所以$a_{k_j}>a_{k_{j+1}}$
   c)如果没有长度超过n的递增子序列，那么就符合a)和b)部分。因此，我们有$a_{k_{n+1}}>a_{k_n}>\cdots>a_{k_2}>a_{k_1}$，一个长度为$n+1$的递减序列。

3.3 节

1. abc，acb，bac，bca，cab，cba
2. 720
3. a)120 b)720 c)8 d)6720 e)40 320 f)3 628 800
4. 15 120
5. 1320
6. a)210 b)386 c)848 d)252
7. $2(n!)^2$
8. 65 780
9. $2^{100}-5051$
10. a)1024 b)45 c)176 d)252
11. a)120 b)24 c)120 d)24 e)6 f)0
12. 609 638 400
13. a)94 109 400 b)941 094 c)3 764 376 d)90 345 024 e)114 072 f)2328 g)24 h)79 727 040 i)3 764 376 j)109 440
14. a)12 650 b)303 600
15. a)37 927 b)18 915
16. a)122 523 030 b)72 930 375 c)223 149 655 d)100 626 625
17. 54 600
18. 45
19. 912
20. 11 232 000
21. $n!/(r(n-r)!)$
22. 13
23. 873

3.4 节

1. $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$
2. $x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$
3. 101
4. $-2^{10}\binom{19}{9}=-94\ 595\ 072$
5. $-2^{101}3^{99}\binom{200}{99}$
6. $(-1)^{(200-k)/3}\binom{100}{(200-k)/3}$如果$k\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$并且$-100\leqslant k\leqslant 200$时；0如果$k$为其他值
7. 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
8. 所有正整数的和为$\binom{n}{k}$，当k为从$0\sim n$时，是2^n，所以其中任何一个都不会比它们的和大。

9. $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2}\leqslant\frac{n\cdot n\cdots n}{2\cdot 2\cdots 2}=n^k/2^{k-1}$

10. $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n!}{k!\,(n-k+1)!}\cdot[k+(n-k+1)]=\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}=\binom{n+1}{k}$

11. a)证明恒等式两边计数了从一个 n 元素集合中选 k 个元素，然后从这个子集中再选 1 个元素的方法。对等式的左边，首先选择有 k 个元素的子集(共有 $\binom{n}{k}$ 种方法)，然后从这 k 个元素中选择一个作为不同元素(共有 k 种方法)。对等式的右边，首先在整个 n 个元素的集合中选择一个不同元素(共有 n 种方法)。然后从剩余的 $n-1$ 个元素中选择剩余的 $k-1$ 个待选元素(共有 $\binom{n-1}{k-1}$ 种方法)。

b) $k\binom{n}{k}=k\cdot\frac{(n!)!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}=n\binom{n-1}{k-1}$

12. $\binom{n+1}{k}=\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}=\frac{(n+1)}{k}\cdot\frac{n!}{(k-1)!\,[n-(k-1)]!}=(n+1)\binom{n}{k-1}/k$

这个等式与 $\binom{n}{0}=1$ 共同给出了归纳定义。

13. $\binom{2n}{n+1}+\binom{2n}{n}=\binom{2n+1}{n+1}=\frac{1}{2}\left[\binom{2n+1}{n+1}+\binom{2n+1}{n+1}\right]=\frac{1}{2}\left[\binom{2n+1}{n+1}+\binom{2n+1}{n}\right]=\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$

14. a) $\binom{n+r+1}{r}$统计了通过选择 0 的位置得到的 r 个 0 与 $n+1$ 个 1 的序列的方法数。假设第$(j+1)$个项是等于 1 的最后一个项，那么有 $n\leqslant j\leqslant n+r$。如果确定了最后一个 1 的位置，我们就可以决定所有的 0 在最后一个 1 前面的 j 个空位中的摆放的位置。在这个范围内共有 n 个 1 与 $j-n$ 个 0。根据求和法则 $\sum_{j=n}^{n+r}\binom{j}{j-n}=\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}$ 有种方法。

b)设 $P(r)$是我们要证明的公式。第一步：有 $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$，即 $1=1$。假设 $P(r)$为真，那么有如下等式：

$$\sum_{k=0}^{r+1}\binom{n+k}{k}=\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}+\binom{n+r+1}{r+1}=\binom{n+r+1}{r}+\binom{n+r+1}{r+1}=\binom{n+r+2}{r+1}$$

根据数学归纳法与帕斯卡定理得证。

15. 我们可以首先选择出一个领导者，共有 n 种方法，然后再选择出委员会 i，共有 2^{n-1} 种方法。这样就共有 $\binom{n}{k}$ 种方法选择出委员会与其领导者。同时，组建一个有 k 个人的委员会的方法共有种。如果我们已经选择出了一个 k 个人的委员会，那么有 k 种方法来选择其领导者。这样就共有 $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$ 种方法来建立一个由 k 个人组成的委员会及其领导者。即 $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$ 。

16. 假设集合中有 n 个元素。根据推论 2 我们得出：$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$。即 $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$。公式左边给出了偶数元素的集合，公式右边给出了奇数元素的集合。

17. a)期望得到的路径类型是由向右移动 m 步，向上移动 n 步得到的。每一条这种类型的路径都可以由一个 0、1 字符组成的长度为 $m+n$ 的位串表示，其中 0 代表向右移动，1 代表向上移动。

b)长度为 $m+n$ 的位串恰好包含 n 个 1 的数量为 $\binom{m+n}{n}=\binom{m+n}{m}$，因为这样的一个位串是由 m 个 0 的位置或者是由 n 个 1 的位置来决定的。

18. 根据练习 17，在练习 17 中描述的 n 步路径的数量为 2^n，位串的长度为 n。另一方面，练习 17 中一个 n 步路径必须以一个坐标和为 n 的点结束，即 $(n-k,\ k)$，其中 k 为 0～n 中的一个数。根据练习 17，这样以 $(n-k,\ k)$ 结尾的路径数为 $\binom{n-k+k}{k}=\binom{n}{k}$。这样就有 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$。

19. 练习 17 中描述的从点 $(0,\ 0)$ 到点 $(n+1,\ r)$ 的路径数为 $\binom{n+r+1}{r}$。但是这样的路径要垂直移动 j 步，其中 $1\leqslant j\leqslant r$。这样需要垂直移动 j 步的路径数量等于在练习 17 中描述的从点 $(1,\ j)$ 移动到点 $(n+1,\ r)$ 的路径数。这与从点 $(0,\ 0)$ 到点 $(n,\ r-j)$ 的路径数是相等的，其数量在练习 33 中计算得到为 $\binom{n+r-j}{r-j}$。由于 $\sum_{j=0}^{r}\binom{n+r-j}{r-j}=\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}$，得出 $\sum_{k=1}^{r}\binom{n+k}{k}=\binom{n+r+1}{r}$。

20. a) $\binom{n+1}{2}$　b) $\binom{n+2}{3}$　c) $\binom{2n-2}{n-1}$　d) $\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$

e)帕斯卡三角中最大的奇数项出现在第 n 行　f) $\binom{3n-3}{n-1}$

3.5 节

1. 234
2. 26^6
3. 125
4. 35
5. a)1716　b)50 388　c)2 629 575　d)330
6. 9
7. 4 504 501
8. a)10 626　b)1 365　c)11 649　d)106
9. 2 520
10. 302 702 400
11. 3003
12. 7 484 400
13. 30 492
14. $C(59,\ 50)$
15. 35
16. 83 160
17. 63
18. 19 635
19. 210
20. 27 720
21. $52!/(7!^5 17!)$
22. 近似为 6.5×10^{32}
23. a) $C(k+n-1,\ n)$　b) $(k+n-1)!/(k-1)!$
24. 有 $C(n,\ n_1)$ 种方法来为第 1 个盒子选择 n_1 个物体。如果这些物体被选中，那么会有 $C(n-n_1,\ n_2)$ 种方法来为第 2 个盒子选择物体。同样，有 $C(n-n_1-n_2,\ n_3)$ 种方法来为第 3 个盒子选择物体。重复这一计算直到有 $C(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1},\ n_k)=C(n_k,\ n_k)=1$ 种方法来为最后一个盒子选择物体(因为 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$)。根据乘积法则，所有的分配方法数为 $C(n,\ n_1)C(n-n_1,\ n_2)C(n-n_1-n_2,\ n_3)\cdots C(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1},\ n_k)$，等于 $n!/(n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!)$。
25. a)由于 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_r$，所以 $x_1+0<x_2+1<\cdots<x_r+r-1$。这个不等式是严格成立的，因为正如

$x_j \leqslant x_{j+1}$，有 $x_j+j-1<x_{j+1}+j$。由于有 $1\leqslant x_j \leqslant n+r-1$，所以这个序列由 T 中 r 个不同元素组成的。

b)假设 $1\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_r\leqslant n+r-1$。令 $y_k=x_k-(k-1)$。那么不难看出 $y_k\leqslant y_{k+1}$，其中 $k=1$，2，…,$r-1$，同时有 $1\leqslant y_k\leqslant n$，其中 $k=1$，2，…r。那么就会得出$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$是一个 S 中允许重复的 r 组合集合。

c)根据 a)与 b)中所提到的，在 S 中允许重复的 r 组合与 T 中出现的 r 组合之间存在一种 1 对 1 的对应关系，一个有 $n+r-1$ 个元素的集合。我们得出共有 $C(n+r-1)$在 S 中允许重复的 r 组合。

26. 65
27. 65
28. 2
29. 3
30. a)150 b)25 c)6 d)2
31. 90 720
32. 展开式中项的形式是 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$，其中 $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$。这样的项是递增的，选择 x_1 时有 n_1 个因子，选择 x_2 时有 n_2 个因子，一直到 x_m 有 n_m 个因子。这样共有 $C(n;\ n_1, n_2, \cdots, n_m)$种方法，展开式中的项的形式是 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$，其中 $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$。这一项是这样产生的：选择 n_1 个 x_1 作为因子，选择 n_2 个 x_2 作为因子，一直到选择 n_m 个 x_m 作为因子。这样共有 $C(n;\ n_1, n_2, \cdots, n_m)$种方法，因为一次选择就是 n_1 个标号“1”，n_2 个标号“2”，…和 n_m 个标号“m”的排列。
33. 2520

3.6 节

1. 14532，15432，21345，23451，23514，31452，31542，43521，45213，45321
2. AAA1，AAA2，AAB1，AAB2，AAC1，AAC2，ABA1，ABA2，ABB1，ABB2，ABC1，ABC2，ACA1，ACA2，ACB1，ACB2，ACC1，ACC2，BAA1，BAA2，BAB1，BAB2，BAC1，BAC2，BBA1，BBA2，BBB1，BBB2，BBC1，BBC2，BCA1，BCA2，BCB1，BCB2，BCC1，BCC2，CAA1，CAA2，CAB1，CAB2，CAC1，CAC2，CBA1，CBA2，CBB1，CBB2，CBC1，CBC2，CCA1，CCA2，CCB1，CCB2，CCC1，CCC2
3. a)2134 b)54132 c)12534 d)45312
4. 1234，1243，1324，1342，1423，1432，2134，2143，2314，2341，2413，2431，3124，3142，3214，3241，3412，3421，4123，4132，4213，4231，4312，4321
5. {1，2，3}，{1，2，4}，{1，2，5}，{1，3，4}，{1，3，5}，{1，4，5}，{2，3，4}，{2，3，5}，{2，4，5}，{3，4，5}
6. 代表下一个更大的 r 组合的位串必须与代表原始组合的位串在位置 i 不同，因为位置 $i+1$，…，r 被可能最大的数占用。同样 a_i+1 是可能最小的数，我们可以把它放在位置 i 处，如果我们想要得到一个比原始数更大的数。那么 a_i+2，…，$a_i+r-i+1$ 是最小位置 $i+1$ 到位置 r 中允许的最小数。这样我们就生成了下一个 r 组合。
7. 123，132，213，231，312，321，124，142，214，241，412，421，125，152，215，251，512，521，134，143，314，341，413，431，135，153，315，351，513，531，145，154，415，451，514，541，234，243，324，342，423，432，235，253，325，352，523，532，245，254，425，452，524，542，345，354，435，453，534，543
8. 我们将通过证明它有一个倒转的映射来证明它是一个双射。给出一个小于 $n!$ 的正整数，令 a_1，a_2，…,a_{n-1}是康特尔展式。将 n 放置在 $n-a_{n-1}$处；然后很明显地得出 a_{n-1}是小于 n 的整数，并且在序列中跟随在 n 的后面。然后将 $n-1$ 放在空位$(n-1)-a_{n-2}$，这里我们对这些空位进行编号 1，2，…,$n-1$(排除掉存有 n 的位置)。重复操作直到 1 被放置在唯一的空位。因为我们能够建立一个倒转序列，所以这是一个双射。

补充练习

1. a)151 200 b)1 000 000 c)210 d)5005

3. 3^{100}

5. 24 600

7. a)4060 b)2688 c)25 009 600

9. a)192 b)301 c)300 d)300

11. 639

13. 最大的可能和是 240，最小的可能和是 15。所以可能的和为 226，因为在一个有 10 个元素的集合中共有 252 个拥有 5 个元素的子集，由鸽巢原理，至少有两个有一样的和。

15. a)50 b)50 c)14 d)17

17. 令 a_1，a_2，…，a_m 是整数，设 $d_i=\sum_{j=1}^{i}a_j$。如果对于某些 i 有 $d_i\equiv0(\mathrm{mod}\ n)$，那么我们便得出结论。否则如果 $d_1\ \mathbf{mod}\ m$，$d_2\ \mathbf{mod}\ m$，…，$d_m\ \mathbf{mod}\ m$ 是 m 个在{1，2，…，$m-1$}中的整数，其值属于{1，2，…，$m-1$}，根据鸽巢原理，对于 $1\leqslant k<l\leqslant m$ 有 $d_k=d_l$。那么 $\sum_{j=k+1}^{l}a_j=d_l-d_k\equiv0(\mathrm{mod}\ m)$。

19. 一个有理数 a/b 的十进制展开式可以通过 b 除 a 来获得，其中 a 要写成十进制小数的形式，小数点后用多个 0 的长字符串表示。第一步是找到与商值相邻的下一个数字，即 $\lfloor r/b\rfloor$，其中 r 是余数。当前的余数是通过前一个数字除 b 的次数得到的余数来得到。实际上被除数只是减少 0 的个数。而且，只存在 b 种可能的余数。因此，根据鸽巢原理，我们将会遇到与前面一样的情况。从这种观点来看，计算模式必须与前面的情况一致。实际上就是商值会不断地重复。

21. a)125 970 b)20 c)141 120 525 d)141 120 505 e)177 100 f)141 078 021

23. a)10 b)8 c)7

25. 3^n

27. $C(n+2，r+1)=C(n+1，r+1)+C(n+1，r)=2C(n+1，r+1)-C(n+1，r+1)+C(n+1，r)=2C(n+1，r+1)-(C(n，r+1)+C(n，r))+(C(n，r)+C(n，r-1))=2C(n+1，r+1)-C(n，r+1)+C(n，r-1)$

29. 将 $x=1$ 与 $y=3$ 代入到二项式公式中。

31. 等式的两边都是计算从集合{1，2，…，n}中选出的由 3 个不同的数{i，j，k}($i<j<k$)
组成的子集的方法数。

33. $C(n+1，5)$

35. 3 491 888 400

37. 5^{24}

39. a)45 b)57 c)12

41. a)386 b)56

43. 0，当 $n<m$ 时；$C(n-1，n-m)$，当 $n\geqslant m$ 时。

45. a)15 625 b)202 c)210 d)10

47. a)3 b)11 c)6 d)10

49. 有 2 种可能：3 个人坐在同一张桌子，每个人都是单独坐，有 $2C(n，3)$种方式(选择三个人，然后分两种情况布置)；或者分成两个组，每组中两个人坐同一张桌子，但不相邻，有 $3C(n，4)$种方法(选择 4 个人，然后从 3 种方式中选择一种进行组合)。这两种方法数无论是 $2C(n，3)+3C(n，4)$还是 $(3n-1)C(n，3)/4$，都等于 $n^4/8-5n^3/12+3n^2/8-n/12$。

51. $2n$ 个物体，n 种类别，每种类别有 2 个物体，其排序数为$(2n)!/2^n$。因为这个结果肯定是一个整数，所以分母肯定可以整除分子。

53. CCGGUCCGAAAG

55. **procedure** next permutation(n：正整数，a_1，a_2，…，a_r：不超过 n 的正整数，$a_1a_2\cdots a_r\neq nn\cdots n$)
$i:=r$
while $a_i=n$
 $a_i=1$
 $i:=i+1$
 $a_i:=a_i+1$

$\{a_1a_2\cdots a_r$ 是下一个词典序列的排序$\}$

57. 我们必须证明，如果在聚会上有 $R(m，n-1)+R(m-1，n)$个人，那么其中至少有 m 个彼此是朋友的人或者 n 个彼此是敌人的人。考虑其中的一个人，我们假设他叫杰瑞。那么有 $R(m-1，n)+R(m，n-1)-1$ 个其他人在聚会上，根据鸽巢原理，其中至少有 $R(m-1，n)$个人是杰瑞的朋友，或者 $R(m，n-1)$个人是杰瑞的敌人。首先，我们假设有 $R(m-1，n)$个人是杰瑞的朋友。根据 R 的定义，在这些人中我们能保证找出 $m-1$ 个彼此是朋友的人，或者 n 个彼此是敌人的人。在前一种情况下，这 $m-1$ 个彼此是朋友的人与杰瑞共同组成一个有 m 个彼此是朋友的人的集合；在后一种情况下，我们得到期望有 n 个彼此是敌人的集合。另一种情况下也是类似的，假设有 $R(m，n-1)$个杰瑞的敌人。我们能保证找到 m 个互相为朋友的人，或者 $n-1$ 个彼此为敌人的人。前一种情况，我们得到期望的有 m 个彼此为朋友的人的集合，后一种情况下，这 $n-1$ 个彼此为敌人的人与杰瑞共同组成一个有 n 个彼此为敌人的人的集合。

第 4 章

4.1 节

1. 设 $P(n)$是“$H_n=2^n-1$”。
   基础步骤：$P(1)$为真，因为 $H_1=1$。
   归纳步骤：假设 $H_n=2^n-1$，那么因为 $H_{n+1}=2H_n+1$，所以可以得到 $H_{n+1}=2(2^n-1)+1=2^{n+1}-1$。
2. a)$a_n=2a_{n-1}+a_{n-5}$，对于 $n\geqslant 5$　b)$a_0=1$，$a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=8$，$a_4=16$　c)1217
3. 9494
4. a)$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+2^{n-2}$，对于 $n\geqslant 2$　b)$a_0=0$，$a_1=0$　c)94
5. a)$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}$，对于 $n\geqslant 3$　b)$a_0=1$，$a_1=2$，$a_2=4$　c)81
6. a)$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，对于 $n\geqslant 2$　b)$a_0=1$，$a_1=1$　c)34
7. a)$a_n=2a_{n-1}+2a_{n-2}$，对于 $n\geqslant 2$　b)$a_0=1$，$a_1=3$　c)448
8. a)$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$，对于 $n\geqslant 2$　b)$a_0=1$，$a_1=3$　c)239
9. a)$a_n=2a_{n-1}$，对于 $n\geqslant 2$　b)$a_1=3$　c)96
10. a)$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，对于 $n\geqslant 2$　b)$a_0=1$，$a_1=1$　c)89
11. a)$R_n=n+R_{n-1}$，$R_0=1$　b)$R_n=n(n+1)/2+1$
12. a)$S_n=S_{n-1}+(n^2-n+2)/2$，$S_0=1$　b)$S_n=(n^3+5n+6)/6$
13. 64
14. a)$a_n=2a_{n-1}+2a_{n-2}$　b)$a_0=1$，$a_1=3$　c)1224
15. 很显然，对于 $m\geqslant 1$ 有 $S(m，1)=1$。如果 $m\geqslant n$，那么一个从 m 元素集合到 n 元素集合的非映上函数可以由选择值域的大小和值域中的元素来确定。值域的大小是 $1\sim n-1$ 之间的整数 k，包含 1 和 $n-1$，而这个值域可以用 $C(n，k)$种方式选取，并且选择一个到这个值域的映上函数可以有 $S(m，k)$种方式。因此存在 $\sum_{k=1}^{n-1}C(n,k)S(m,k)$ 个非映上函数。但是总共存在 n^m 个函数，所以 $S(m,n)=n^m-\sum_{k=1}^{n-1}C(n,k)S(m,k)$。
16. a)$C_5=C_0C_4+C_1C_3+C_2C_2+C_3C_1+C_4C_0=1\cdot 14+1\cdot 5+2\cdot 2+5\cdot 1+14\cdot 1=42$
    b)$C(10，5)/6=42$
17. $J(1)=1$，$J(2)=1$，$J(3)=3$，$J(4)=1$，$J(5)=3$，$J(6)=5$，$J(7)=7$，$J(8)=1$，$J(9)=3$，$J(10)=5$，$J(11)=7$，$J(12)=9$，$J(13)=11$，$J(14)=13$，$J(15)=15$，$J(16)=1$
18. 首先，假设人数是偶数，比如说是 $2n$。在转了一圈并回到第一个人后，由于在偶数位置的人已经被排除，所以恰好有 n 个人留下来并且现在在位置 i 的人就是初始在位置 $2i-1$ 的人。因此，生还者[初始在位置 $J(2n)$]现在的位置是 $J(n)$，这就是在位置 $2J(n)-1$ 的人。所以，$J(2n)=2J(n)-1$。类似地，当有奇数个人时，比如说 $2n+1$ 个人。在转了一圈以后排除第 1 个人，有 n 个人留下来并且现在在位置 i 的人就是以前在位置 $2i+1$ 的人。因此，生还者将是现在占据位置 $J(n)$的人，即初始在

位置 $2J(n)+1$ 的人。所以，$J(2n+1)=2J(n)+1$。基础情形是 $J(1)=1$。

19.73，977，3617

20.下面的 9 次移动求解了这个难题：从柱 1 到柱 2 移动盘 1；从柱 1 到柱 3 移动盘 2；从柱 2 到柱 3 移动盘 1；从柱 1 到柱 2 移动盘 3；从柱 1 到柱 4 移动盘 4；从柱 2 到柱 4 移动盘 3；从柱 3 到柱 2 移动盘 1；从柱 3 到柱 4 移动盘 2；从柱 2 到柱 4 移动盘 1。要明白至少需要 9 次移动，首先注意不管有多少根柱子至少需要移动 7 次：3 次用来拿走盘子，1 次用来移动最大的盘 4，并且还要 3 次移动来放好盘子。至少还需要 2 次另外的移动，因为要从柱 1 到柱 4 移动盘 4，其他 3 个盘子一定在柱 2和柱 3，所以至少需要 1 次移动来放好它们和 1 次移动来拿走它们。

21.基础情形是显然的。如果 $n>1$，算法由 3 步构成。第 1 步，由归纳假设，使用 $R(n-k)$次移动把最小的 $n-k$ 个盘子移到柱 2。然后使用通常的 3 个柱子的汉诺塔算法，用 $2k-1$ 次移动把剩下的盘子(最大的 k 个盘子)移到柱 4，移动时不使用柱 2。然后再由归纳法，用 $R(n-k)$次移动把最小的 $n-k$ 个盘子移到柱 4，对于这种移动，所有的柱子都可以用，因为最大的盘子在柱 4，对移动没有妨碍。这就建立了递推关系。

22.首先注意 $R(n)=\sum_{j=1}^{n}(R(j)-R(j-1))$(因为这个和是缩写式并且 $R(0)=0$)。由练习 42，这就是关于 j 的值域对 $2^{k'-1}$求和，因此这个和是 $\sum_{i=1}^{k} i2^{i-1}$ ，如果 n 不是一个三角形数，那么当 $i=k$ 时最后某些值丢失，并且这就是在给定表达式中最后的项所表示的。

23.由练习 22，$R(n)$不大于 $\sum_{i=1}^{k} i2^{i-1}$ 。可以证明这个和等于$(k+1)2^k-2^{k+1}+1$，因此它不比$(k+1)2^k$大。因为 $n>k(k-1)/2$，所以可以用二次公式证明对于所有的 $n>1$，有 $k<1+\sqrt{2n}$。因此对于所有的$n>2$，$R(n)$以$(1+\sqrt{2n}+1)2^{1+\sqrt{2n}}<8\sqrt{n}2^{\sqrt{2n}}$为上界。所以 $R(n)$是 $O(\sqrt{n}2^{\sqrt{2n}})$。

24.a)0　　b)0　　c)2　　d)$2^{n-1}-2^{n-2}$

25.$a_n-2\nabla a_n+\nabla^2 a_n=a_n-2(a_n-a_{n-1})+(\nabla a_n-\nabla a_{n-1})=-a_n+2a_{n-1}+[(a_n-a_{n-1})-(a_{n-1}-a_{n-2})]=-a_n+2a_{n-1}+(a_n-2a_{n-1}+a_{n-2})=a_{n-2}$

26.$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}=(a_n-\nabla a_n)+(a_n-2\nabla a_n+\nabla^2 a_n)=2a_n-3\nabla a_n+\nabla^2 a_n$，或 $a_n=3\nabla a_n-\nabla^2 a_n$。

27.在 $T(0)$：$=0$ 后插入 $S(0)$：$=0$($S(j)$记录第 j 次迭代的最优集)，用以下代码代替 $T(j):=\max(w_j+T(p(j)),T(j-1))$：

```
if w_j + T(p(j)) > T(j-1) then
    T(j) := w_j + T(p(j))
    S(j) := S(p(j)) ∪ {j}
else
    T(j) := T(j-1)
    S(j) := S(j-1)
```

28.a)这个紧跟在例 5 和 4.4 节练习 1c 之后。

b)计算 $\mathbf{A}_{ij}$ 的最后一步是将 $\mathbf{A}_{ik}$ 与 $\mathbf{A}_{k+1,j}$ 相乘，其中 k 是 i 与 $j-1$ 之间的数，并要求 $m_i m_{k+1} m_{j+1}$ 是整数乘法，独立于 $\mathbf{A}_{ik}$ 和 $\mathbf{A}_{k+1,j}$ 的计算。因此，为了整数乘法的数字最小化，两个因子的计算必须都是最有效的方法。

c)这个紧跟 b)部分和 $M(I,j)$的定义

d)
```
procedure matrix order(m_1, ……, m_{n+1}: 正整数)
  for i := 1 to n
    M(I, i) := 0
  for d := 1 to n-1
   for i := 1 to n-d
    min := 0
    for k := i to i+d
    new := M(i, k) + M(k+1, i+d) + m_i m_{k+1} m_{i+d+1}
```

```
    if new<min then
      min := new
      where(i, i+d) := k
  M(i, i+d) := min
```

e)算法有 3 个嵌入循环，每次循环最多 n 次

4.2 节

1. a)3 阶　b)不是　c)4 阶　d)不是　e)不是　f)2 阶　g)不是
2. a)$a_n=3\cdot 2^n$　b)$a^n=2$　c)$a_n=3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$
   d)$a_n=6\cdot 2^n-2\cdot n2^n$　e)$a_n=n(-2)^{n-1}$　f)$a_n=2^n-(-2)^n$
   g)$a_n=(1/2)^{n+1}-(-1/2)^{n+1}$
3. $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$
4. $[2^{n+1}+(-1)^n]/3$
5. a)$P_n=1.2P_{n-1}+0.45P_{n-2}$，$P_0=100\ 000$，$P_1=120\ 000$
   b)$P_n=(250\ 000/3)(3/2)^n+(50\ 000/3)(-3/10)^n$
6. a)基础步骤：对于 $n=1$，有 $1=0+1$；且对于 $n=2$，有 $3=1+2$。
   归纳步骤：假设对于 $k\leqslant n$ 为真，那么 $L_{n+1}=L_n+L_{n-1}=f_{n-1}+f_{n+1}+f_{n-2}+f_n=(f_{n-1}+f_{n-2})+(f_{n+1}+f_n)=f_n+f_{n+2}$
   b)$L_n=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
7. $a_n=8(-1)^n-3(-2)^n+4\cdot 3^n$
8. $a_n=5+3(-2)^n-3^n$
9. 设 $a_n=C(n,0)+C(n-1,1)+\cdots+C(n-k,k)$，其中 $k=\lfloor n/2\rfloor$。首先，假设 n 是偶数，这样 $k=n/2$，且最后项是 $C(k,k)$。由帕斯卡恒等式有 $a_n=1+C(n-2,0)+C(n-2,1)+C(n-3,1)+C(n-3,2)+\cdots+C(n-k,k-2)+C(n-k,k-1)+1=1+C(n-2,1)+C(n-3,2)+\cdots+C(n-k,k-1)+C(n-2,0)+C(n-3,1)+\cdots+C(n-k,k-2)+1=a_{n-1}+a_{n-2}$，因为 $\lfloor(n-1)/2\rfloor=k-1=\lfloor(n-2)/2\rfloor$。当 n 是奇数时有类似的计算。因此，对于所有的正整数 n，$n\geqslant 2$，$\{a_n\}$ 满足递推关系 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$。此外，$a_1=C(1,0)=1$，$a_2=C(2,0)+C(1,1)=2$，这就是 f_2 和 f_3。从而得到对于所有的正整数 n，$a_n=f_{n+1}$。
10. $a_n=(n^2+3n+5)(-1)^n$
11. $(a_{1,0}+a_{1,1}n+a_{1,2}n^2+a_{1,3}n^3)+(a_{2,0}+a_{2,1}n+a_{2,2}n^2)(-2)^n+(a_{3,0}+a_{3,1}n)3^n+a_{4,0}(-4)^n$
12. a)$3a_{n-1}+2^n=3(-2)^n+2^n=2^n(-3+1)=-2^{n+1}=a_n$
    b)$a_n=\alpha 3^n-2^{n+1}$
    c)$a_n=3^{n+1}-2^{n+1}$
13. a)$A=-1$，$B=-7$　b)$a_n=\alpha 2^n-n-7$　c)$a_n=11\cdot 2^n-n-7$
14. a)$p_3n^3+p_2n^2+p_1n+p_0$　b)$n^2p_0(-2)^n$　c)$n^2(p_1n+p_0)2^n$
    d)$(p_2n^2+p_1n+p_0)4^n$　e)$n^2(p_2n^2+p_1n+p_0)(-2)^n$　f)$n^2(p_4n^4+p_3n^3+p_2n^2+p_1n+p_0)2^n$
    g)p_0
15. a)$a_n=\alpha 2^n+3^{n+1}$　b)$a_n=-2\cdot 2^n+3^{n+1}$
16. $a_n=\alpha 2^n+\beta 3^n-n\cdot 2^{n+1}+3n/2+21/4$
17. $a_n=(\alpha+\beta n+n^2+n^3/6)2^n$
18. $a_n=-4\cdot 2^n-n^2/4-5n/2+1/8+(39/8)3^n$
19. $a_n=n(n+1)(n+2)/6$
20. a)1，-1，i，$-i$　b)$a_n=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}(-1)^n+\dfrac{2+i}{4}i^n+\dfrac{2-i}{4}(-i)^n$
21. a)使用关于 f_n 的公式可看出

$$\left|f_n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right|<1/\sqrt{5}<1/2$$

这意味着 f_n 是最接近$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 的整数。

b)当 n 是偶数时较小；当 n 是奇数时较大。

22. $a_n=f_{n-1}+2f_n-1$
23. a)$a_n=3a_{n-1}+4a_{n-2}$，$a_0=2$，$a_1=6$ b)$a_n=[4^{n+1}+(-1)^n]/5$
24. a)$a_n=2a_{n-1}+(n-1)10\,000$ b)$a_n=70\,000\ 2^{n-1}-10\,000\ n-10\,000$
25. 见参考文献[Ma93]的 11.5 节。
26. $6^n\cdot 4^{n-1}/n$

4.3 节

1. 14
2. 第一步是$(1110)_2(1010)_2=(2^4+2^2)(11)_2(10)_2+2^2[(11)_2-(10)_2][(10)_2-(10)_2]+(2^2+1)(10)_2\cdot(10)_2$。积是$(10001100)_2$。
3. $C=50$，$665C+729=33\,979$
4. a)2 b)4 c)7
5. a)79 b)48 829 c)30 517 579
6. a)*基础步骤*：如果序列只有一个元素，那么在这个表中的一个人就是赢的人。
递归步骤：把这个表分成两部分(前一半和后一半尽可能相等)。递归地应用算法到每一半直到至多出现两个名字为止。然后检查整个表来计算每个名字出现的数目，如果谁超过半数就决定谁赢。
b)$O(n\log n)$
7. a)$f(n)=f(n/2)+2$ b)$O(\log n)$
8. a)7 b)$O(\log n)$
9. a)

```
procedure largest sum(a1, a2, …, an)
best: =0{空序列和为 0}
for i :=1 to n
  sum :=0
  for j :=i+1 to n
    sum :=sum+aj
    if sum>best then best :=sum
{best 是在这个表中可能的最大和}
```

b)$O(n^2)$

c)我们把这个表划分成前一半和后一半，并且递归地对每一半应用算法寻找连续项的最大和。整个序列的连续项的最大和是这两个数中的一个，或者是横跨这个表中间的连续项的序列之和。为了找到横跨这个表中间的连续项序列的最大可能的和，我们从表的中间开始向后移动来寻找在这个表的后一半的最大可能的和，并且向前移动来寻找在这个表的前一半的最大可能的和。所要的和就是这两个量之和。那么最后的答案就是这个和以及递归得到的两个答案之中的最大者。基础情况是一个项的序列的最大和就是这个数和 0 之中的较大者。

d)11，9，14

e)$S(n)=2S(n/2)+n$，$C(n)=2C(n/2)+n+2$，$S(1)=0$，$C(1)=1$

f)$O(n\log n)$，比 $O(n^2)$好

10. (1，6)和(3，6)距离为 2。
11. 算法基本上与例 12 给出的算法一样。中心空隙宽度仍然是 $2d$，但我们仅需要考虑 2 个大小为 $d\times d$ 的盒子而不是大小为$(d/2)\times(d/2)$的 8 个盒子。除了系数 7 被 1 替换以外，递推关系与例 12 中的递推关系一样。
12. 由于 $k=\log_b n$，所以 $f(n)=a^k f(1)+\sum_{j=0}^{k-1}a^j c(n/b^j)^d=a^k f(1)+\sum_{j=0}^{k-1}cn^d=a^k f(1)+kcn^d=a^{\log_b n}f(1)+$

$c(\log_b n)n^d = n^{\log_b a} f(1) + cn^d \log_b n = n^d f(1) + cn^d \log_b n$。

13. 设 $k=\log_b n$，其中 n 是 b 的幂。

基础步骤：如果 $n=1$，$k=0$，那么 $c_1 n^d + c_2 n^{\log_b a} = c_1 + c_2 = b^d c/(b^d - a) + f(1) + b^d c/(a - b^d) = f(1)$。

归纳步骤：假设对于 k 为真，其中 $n=b^k$。那么对于 $n=b^{k+1}$，$f(n) = af(n/b) + cn^d = a\{[b^d c/(b^d - a)](n/b)^d + [f(1) + b^d c/(a-b^d)] \cdot (n/b)^{\log_b a})\} + cn^d = b^d c/(b^d - a) n^d a/b^d + [f(1) + b^d c/(a-b^d)] n^{\log_b a} + cn^d = n^d[ac/(b^d - a) + c(b^d - a)/(b^d - a)] + [f(1) + b^d c/(a - b^d c)] n^{\log_b a} = [(b^d c)/(b^d - a)] n^d + [f(1) + b^d c/(a - b^d)] n^{\log_b a}$。

14. 如果 $a > b^d$ 那么 $\log_b a > d$，所以第二项为主，给出 $O(n^{\log_b a})$。

4.4 节

1. $f(x) = 2(x^6 - 1)/(x-1)$
2. a) $f(x) = 2x(1-x^6)/(1-x)$ b) $x^3/(1-x)$ c) $x/(1-x^3)$
d) $2/(1-2x)$ e) $(1+x)^7$ f) $2/(1+x)$
g) $[1/(1-x)] - x^2$ h) $x^3/(1-x)^2$
3. a) $5/(1-x)$ b) $1/(1-3x)$ c) $2x^3/(1-x)$
d) $(3-x)/(1-x)^2$ e) $(1+x)^8$
4. a) $a_0 = -64$，$a_1 = 144$，$a_2 = -108$，$a_3 = 27$，对于所有的 $n \geqslant 4$ 有 $a_n = 0$。
b) 非零系数只有 $a_0 = 1$，$a_3 = 3$，$a_6 = 3$，$a_9 = 1$。
c) $a_n = 5^n$。
d) 对于 $n \geqslant 3$，有 $a_n = (-3)^{n-3}$，$a_0 = a_1 = a_2 = 0$。
e) $a_0 = 8$，$a_1 = 3$，$a_2 = 2$，对于比 2 大的 n，n 为奇数有 $a_n = 0$，n 为偶数有 $a_n = 1$。
f) 如果 n 是 4 的正整数倍，$a_n = 1$；如果 $n < 4$，有 $a_n = -1$；否则，$a_n = 0$。
g) 对于 $n \geqslant 2$ 有 $a_n = n-1$，$a_0 = a_1 = 0$。
h) $a_n = 2^{n+1}/n!$
5. a) 6 b) 3 c) 9 d) 0 e) 5
6. a) 1024 b) 11 c) 66 d) 292 864 e) 20 412
7. 10
8. 50
9. 20
10. $f(x) = 1/[(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})]$
11. 15
12. a) $x^4(1+x+x^2+x^3)^2/(1-x)$ b) 6
13. a) 在 $1/[(1-x^3)(1-x^4)(1-x^{20})]$ 的幂级数展开式中 x^r 的系数
b) $1/(1-x^3-x^4-x^{20})$ c) 7 d) 3224
14. a) 3 b) 29 c) 29 d) 242
15. a) 10 b) 49 c) 2 d) 4
16. a) $G(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2$ b) $G(x^2)$ c) $x^4 G(x)$ d) $G(2x)$
e) $\int_0^x G(t)\,dt$ f) $G(x)/(1-x)$
17. $a_k = 2 \cdot 3^k - 1$
18. $a_k = 18 \cdot 3^k - 12 \cdot 2^k$
19. $a_k = k^2 + 8k + 20 + (6k - 18)2^k$
20. 设 $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$。在对和式的序标移位并将序列求和以后，得到 $G(x) - xG(x) - x^2 G(x) = f_0 + (f_1 - f_0)x + \sum_{k=2}^{\infty}(f_k - f_{k-1} - f_{k-2})x^k = 0 + x + \sum_{k=2}^{\infty} 0x^k$，由此得 $G(x) - xG(x) - x^2 G(x) = x$。求解 $G(x)$ 得 $G(x) = x/(1-x-x^2)$。由部分分式的方法证明 $x/(1-x-x^2) = (1/\sqrt{5})[1/(1-\alpha x) - 1/(1-$

$\beta x)]$，其中 $\alpha=(1+\sqrt{5})/2$ 且 $\beta=(1-\sqrt{5})/2$。由事实 $1/(1-\alpha x)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k x^k$，得到 $G(x)=(1/\sqrt{5})\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha^k-\beta^k)x^k$，因此 $f_k=(1/\sqrt{5})(\alpha^k-\beta^k)$。

21. a) 设 $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n$ 是 $\{C_n\}$ 的生成函数。那么 $G(x)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}C_kC_{n-k}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}C_kC_{n-1-k}\right)x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}C_nx^{n-1}$，因此 $xG(x)^2=\sum_{n=1}^{\infty}C_nx^n$，这就推出 $xG(x)^2-G(x)+1=0$。应用二次方程求根公式得 $G(x)=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$。在这个公式中我们选择减号，因为选择加号会导致除以零。

b) $(1-4x)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$。逐项积分(根据微积分的定理是允许的)，得 $\int_0^x(1-4t)^{-1/2}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$。因为 $\int_0^x(1-4t)^{-1/2}\mathrm{d}t=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}=xG(x)$，所以由系数相等可得 $C_n=\dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。

c) 当 $n=1,2,3,4,5$ 时，验证基础步骤。假设归纳假设为 $C_j\geqslant 2^{j-1}(1\leqslant j<n, n\geqslant 6)$。那么 $C_n=\sum_{k=0}^{n-1}C_kC_{n-k-1}\geqslant\sum_{k=1}^{n-2}C_kC_{n-k-1}\geqslant(n-2)2^{k-1}2^{n-k-2}=(n-2)2^{n-1}/4\geqslant 2^{n-1}$。

22. 对等式 $(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n$ 应用二项式定理，证明 $\sum_{r=0}^{m+n}C(m+n,r)x^r=\sum_{r=0}^{m}C(m,r)\,x^r\cdot\sum_{r=0}C(n,r)x^r=\sum_{r=0}^{m+n}\left[\sum_{k=0}^{r}C(m,r-k)C(n,k)\right]x^r$。比较系数就得到所需要的恒等式。

23. a) $2e^x$　b) e^{-x}　c) e^{3x}　d) xe^x+e^x

24. a) $a_n=(-1)^n$　b) $a_n=3\cdot 2^n$　c) $a_n=3^n-3\cdot 2n$

d) $a_n=(-2)^n$，$n\geqslant 2$，$a_1=-3$，$a_0=2$

e) $a_n=(-2)^n+n!$

f) $a_n=(-3)^n+n!\cdot 2^n$，$n\geqslant 2$，$a_0=1$，$a_1=-2$

g) 若 n 是奇数，$a_n=0$；若 n 是偶数，$a_n=n!/(n/2)!$

25. a) $a_n=6a_{n-1}+8^{n-1}$，$n\geqslant 1$，$a_0=1$。

b) 相关的线性齐次递推关系的通解是 $a_n^{(h)}=\alpha 6^n$，特解是 $a_n^{(p)}=\dfrac{1}{2}\cdot 8^n$。因此通解是 $a_n=\alpha 6^n+\dfrac{1}{2}\cdot 8^n$。使用初始条件得 $\alpha=\dfrac{1}{2}$，因此 $a_n=(6^n+8^n)/2$。

c) 设 $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$。使用关于 $\{a_k\}$ 的递推关系可以证明 $G(x)-6xG(x)=(1-7x)/(1-8x)$，因此 $G(x)=(1-7x)/[(1-6x)(1-8x)]$。由部分分式得 $G(x)=(1/2)/(1-6x)+(1/2)/(1-8x)$。利用表 1 得 $a_n=(6^n+8^n)/2$。

26. $\dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{1}{1-x^2}\cdot\dfrac{1}{1-x^3}\cdots$

27. $(1+x)(1+x)^2(1+x)^3\cdots$

28. 因为 $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots=\dfrac{1-x^2}{1-x}\cdot\dfrac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\dfrac{1-x^6}{1-x^3}\cdots=\dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{1}{1-x^3}\cdot\dfrac{1}{1-x^5}\cdots$，所以结论正确。

29. a) $G_X(1)=\sum_{k=0}^{\infty}p(X=k)\cdot 1^k=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=1$

b) $G_X'(1)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty}p(X=k)\cdot x^k\,|_{x=1}=\sum_{k=0}^{\infty}p(X=k)\cdot k\cdot x^{k-1}\,|_{x=1}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p(X=k) \cdot k = E(X)$$

c) $G_X''(1) = \frac{d^2}{dx^2} \sum_{k=0}^{\infty} p(X=k) \cdot x^k \mid_{x=1} = \sum_{k=0}^{\infty} p(X=k) \cdot k(k-1) \cdot x^{k-2} \mid_{x=1}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} p(X=k) \cdot (k^2-k) = V(X) + E(X)^2 - E(X)$。与 b) 组合就得到所需要的结果。

30. a) $G(x) = p^m/(1-qx)^m$ b) $V(x) = mq/p^2$

4.5 节

1. a) 30 b) 29 c) 24 d) 18
2. 1%
3. a) 300 b) 150 c) 175 d) 100
4. 492
5. 974
6. 55
7. 248
8. 50 138
9. 234
10. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_1 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_4| - |A_3 \cap A_5| - |A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_5| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_5| + |A_1 \cap A_4 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_4 \cap A_5| + |A_3 \cap A_4 \cap A_5| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| - |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5| - |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$
11. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| + |A_6| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_1 \cap A_5| - |A_1 \cap A_6| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_6| - |A_3 \cap A_4| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_6| - |A_4 \cap A_5| - |A_4 \cap A_6| - |A_5 \cap A_6|$
12. $p(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) - p(E_1 \cap E_2) - p(E_1 \cap E_3) - p(E_2 \cap E_3) + p(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$
13. 4972/71 295
14. $p(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) + p(E_4) + p(E_5) - p(E_1 \cap E_2) - p(E_1 \cap E_3) - p(E_1 \cap E_4) - p(E_1 \cap E_5) - p(E_2 \cap E_3) - p(E_2 \cap E_4) - p(E_2 \cap E_5) - p(E_3 \cap E_4) - p(E_3 \cap E_5) - p(E_4 \cap E_5) + p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + p(E_1 \cap E_2 \cap E_4) + p(E_1 \cap E_2 \cap E_5) + p(E_1 \cap E_3 \cap E_4) + p(E_1 \cap E_3 \cap E_5) + p(E_1 \cap E_4 \cap E_5) + p(E_2 \cap E_3 \cap E_4) + p(E_2 \cap E_3 \cap E_5) + p(E_2 \cap E_4 \cap E_5) + p(E_3 \cap E_4 \cap E_5)$
15. $p\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} p(E_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} p(E_i \cap E_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} p(E_i \cap E_j \cap E_k) - \cdots + (-1)^{n+1} p\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)$

4.6 节

1. 75
2. 6
3. 46
4. 9875
5. 540
6. 2100
7. 1854
8. a) $D_{100}/100!$ b) $100D_{99}/100!$ c) $C(100, 2)/100!$ d) 0 e) $1/100!$
9. 2 170 680
10. 当 n 是奇数

11. $\phi(n) = n - \sum_{i=1}^{m} \frac{n}{p_i} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} \frac{n}{p_i p_j} - \cdots \pm \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_m} = n\prod_{i=1}^{m}\left(a - \frac{1}{p_i}\right)$

12. 4

13. 从 m 元素集合到 n 元素集合存在 n^m 个函数，从 m 元素集合到 n 元素集合有 $C(n, 1)(n-1)^m$ 个函数恰好缺少 1 个元素，$C(n, 2)(n-2)^m$ 个函数恰好缺少 2 个元素，以此类推，有 $C(n, n-1)1^m$ 个函数恰好缺少 $n-1$ 个元素。因此由容斥原理，存在 $n^m - C(n, 1)(n-1)^m + C(n, 2)(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}C(n, n-1)1^m$ 个映上的函数。

补充练习

1. a) $A_n = 4A_{n-1}$　b) $A_1 = 40$　c) $A_n = 10 \cdot 4^n$

3. a) $M_n = M_{n-1} + 160\,000$　b) $M_1 = 186\,000$　c) $M_n = 160\,000n + 26\,000$
   d) $T_n = T_{n-1} + 160\,000n + 26\,000$　e) $T_n = 80\,000n^2 + 106\,000n$

5. a) $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$　b) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$　c) $a_{12} = 12$

7. a) 2　b) 5　c) 8　d) 16

9. $a_n = 2^n$

11. $a_n = 2 + 4n/3 + n^2/2 + n^3/6$

13. $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$

15. a) 在给定条件下，在每个序列中，最长公共子序列都会在最后一项结束，所以 $a_m = b_n = c_p$。而且，在形成最长公共子序列最后一项后，剩下的 a 序列和 b 序列会形成一个最长公共子序列的新开始。
   b) 如果 $c_p \neq a_m$，那么最长公共子序列在 a 序列最后一项之前结束，因此 c 序列一定是包括 a_1，a_2，…，a_{m-1} 和 b_1，b_2，…，b_n 的最长公共子序列，b 序列同理。

17. **procedure** howlong(a_1, …, a_m, b_1, …, b_m：序列)
```
for i := 1 to m
  L(i, 0) := 0
for j := 1 to n
  L(o, j) := 0
for i := 1 to m
  for j := 1 to m
    if a_i = b_i then L(i, j) := L(i-1, j-1) + 1
    else L(i, j) := max(L(i, j-1), L(i-1, j))
return L(m, n)
```

19. $f(n) = (4n^2 - 1)/3$

21. $O(n^4)$

23. $O(n)$

25. 仅使用两次比较，该算法能将搜索 m 的范围缩小到原序列上半区或者下半区。因为每次可以截断序列一半的长度，所以总体只需要大约 $2\log_2 n$ 次比较。

27. a) $18n + 18$　b) 18　c) 0

29. $\Delta(a_n b_n) = a_{n+1}b_{n+1} - a_n b_n = a_{n+1}(b_{n+1} - b_n) + b_n(a_{n+1} - a_n) = a_{n+1}\Delta b_n + b_n \Delta a_n$

31. a) 设 $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$。那么 $G'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$，因此，$G'(x) - G(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)a_{n+1} - a_n]x^n = \sum_{n=0} x^n/n! = e^x$，这正是题目要求的。可见 $G(0) = a_0 = 1$。
   b) 我们有 $[e^{-x}G(x)]' = e^{-x}G'(x) - e^{-x}G(x) = e^{-x}[G'(x) - G(x)] = e^{-x}e^x = 1$。因此，$e^{-x}G(x) = x + c$，其中 c 是常数。从而，$G(x) = xe^x + ce^x$。由于 $G(0) = 1$，所以 $c = 1$。
   c) 我们有 $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1}/n!) + \sum_{n=0}^{\infty}(x^n/n!) = \sum_{n=1}^{\infty}(x^n/(n-1)!) + \sum_{n=0}^{\infty}(x^n/n!)$。因此，对于所有的 $n \geqslant 1$，$a_0 = 1$，$a_n = 1/(n-1)! + 1/n!$。

33. 7

35. 110
37. 0
39. a)19 b)65 c)122 d)167 e)168
41. $D_{n-1}/(n-1)!$
43. 11/32

第 5 章

5.1 节

1. a)$\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$
   b)$\{(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}$
   c)$\{(1,0),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1),(3,2),(4,0),(4,1),(4,2),(4,3)\}$
   d)$\{(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,2),(3,0),(3,3),(4,0)\}$
   e)$\{(0,1),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1),(4,3)\}$
   f)$\{(1,2),(2,1),(2,2)\}$
2. a)传递的 b)自反的，对称的，传递的 c)对称的 d)反对称的
   e)自反的，对称的，反对称的，传递的 f)没有这些性质
3. a)自反的，传递的 b)对称的 c)对称的 d)对称的
4. a)对称的 b)对称的，传递的 c)对称的 d)自反的，对称的，传递的
   e)自反的，传递的 f)自反的，对称的，传递的 g)反对称的 h)反对称的，传递的
5. 三个性质显然都是满足的
6. c)，d)，f)
7. a)不是反自反的 b)不是反自反的 c)不是反自反的 d)不是反自反的
8. 是，例如在$\{1,2\}$上的关系$\{(1,1)\}$
9. $(a,b)\in R$ 当且仅当 a 比 b 高
10. $\forall a \forall b[(a,b)\in R \to (b,a)\notin R]$
11. 2^{mn}
12. a)$\{(a,b) \mid b$ 整除 $a\}$ b)$\{(a,b) \mid a$ 不整除 $b\}$
13. f^{-1}的图
14. a)$\{(a,b) \mid$ 要求 a 读书 b 或者 a 已经读过书 $b\}$
    b)$\{(a,b) \mid$ 要求 a 读书 b 并且 a 已经读过书 $b\}$
    c)$\{(a,b) \mid$ 或者要求 a 读书 b 但是 a 还没有读过书 b，或者不要求 a 读书 b 但是 a 已经读过书 $b\}$
    d)$\{(a,b) \mid$ 要求 a 读书 b 但是 a 还没有读过书 $b\}$
    e)$\{(a,b) \mid$ 不要求 a 读书 b 但是 a 已经读过书 $b\}$
15. $S\circ R=\{(a,b) \mid a$ 是 b 的父母且 b 有一个兄弟$\}$
    $R\circ S=\{(a,b) \mid a$ 是 b 的叔伯或阿姨$\}$
16. a)R^2 b)R_6 c)R_3 d)R_3
    e)$\varnothing$ f)R_1 g)R_4 h)R_4
17. a)R_1 b)R_2 c)R_3 d)R^2
    e)R_3 f)R^2 g)R^2 h)R^2
18. b 在某个人指导下得到他博士学位，而这个人在 a 的指导下得到他博士学位；存在一个$n+1$ 个人的序列，从 a 开始到 b 结束，使得序列中每个人都是下一个人的导师。
19. a)$\{(a,b) \mid a-b\equiv 0,3,4,6,8$ 或 $9 \pmod{12}\}$
    b)$\{(a,b) \mid a\equiv b \pmod{12}\}$
    c)$\{(a,b) \mid a-b\equiv 3,6$ 或 $9 \pmod{12}\}$
    d)$\{(a,b) \mid a-b\equiv 4$ 或 $8 \pmod{12}\}$

e)$\{(a, b) \mid a-b\equiv 3$，4，6，8 或 9(mod 12)$\}$

20. 8

21. a)65 536　　b)32 768

22. a)$2^{n(n+1)/2}$　　b)$2^n 3^{n(n-1)/2}$　　c)$3^{n(n-1)/2}$

d)$2^{n(n-1)}$　　e)$2^{n(n-1)/2}$　　f)$2^{n^2}-2\cdot 2^{n(n-1)}$

23. 可能没有这样的 b。

24. 若 R 是对称的且$(a, b)\in R$，那么$(b, a)\in R$，因此$(a, b)\in R^{-1}$。从而有 $R\subseteq R^{-1}$。类似地，有 $R^{-1}\subseteq R$，于是 $R=R^{-1}$。相反，若 $R=R^{-1}$且$(a, b)\in R$，那么$(a, b)\in R^{-1}$，从而$(b, a)\in R$，于是 R 是对称的。

25. R 是自反的，当且仅当对所有的 $a\in A$ 有$(a, a)\in R$，当且仅当对所有的 $a\in A$ 有$(a, a)\in R^{-1}$[因为$(a, a)\in R$ 当且仅当$(a, a)\in R^{-1}$]，从而当且仅当 R^{-1}是自反的。

26. 使用数学归纳法。对于 $n=1$，结果显然为真。假设 R^n 是自反和传递的。由定理 1，$R^{n+1}\subseteq R$。为了得到 $R\subseteq R^{n+1}=R^n\circ R$，令$(a, b)\in R$。由归纳假设，$R^n=R$ 并且是自反的。于是$(b, b)\in R^n$，从而$(a, b)\in R^{n+1}$。

27. 使用数学归纳法。$n=1$ 时，结果显然为真。假设 R^n 是自反的，那么对所有的 $a\in A$ 有$(a, a)\in R^n$ 且$(a, a)\in R$。于是对所有的 $a\in A$ 有$(a, a)\in R^n$。$R=R^{n+1}$。

28. 不是，例如 $R=\{(1, 2), (2, 1)\}$。

5.2 节

1. {(1，2，3)，(1，2，4)，(1，3，4)，(2，3，4)}

2. (Nadir，122，34，底特律，08：10)，(Acme，221，22，丹佛，08：17)，(Acme，122，33，安克雷奇，08：22)，(Acme，323，34，檀香山，08：30)，(Nadir，199，13，底特律，08：47)，(Acme，222，22，丹佛，09：10)，(Nadir，322，34，底特律，09：44)

3. 航空公司与航班号，航空公司与起飞时间

4. a)是　　b)不是　　c)不是

5. a)社会保险号
   b)没有两个人恰好有着同一个街道住址且有相同的名字
   c)没有两个有相同的名字的人住在一起

6. (Nadir，122，34，底特律，08：10)，(Nadir，199，13，底特律，08：47)，(Nadir，322，34，底特律，09：44)

7. (Nadir，122，34，底特律，08：10)，(Nadir，199，13，底特律，08：47)，(Nadir，322，34，底特律，09：44)，(Acme，221，22，丹佛，08：17)，(Acme，222，22，丹佛，09：10)

8. $P_{3,5,6}$

9.

航空公司	目的地	航空公司	目的地
Nadir	底特律	Acme	安克雷奇
Acme	丹佛	Acme	檀香山

10.

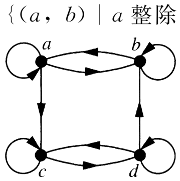
供货商	零件号	项目	数量	颜色代码
23	1092	1	2	2
23	1101	3	1	1
23	9048	4	12	2
31	4975	3	6	2
31	3477	2	25	2
32	6984	4	10	1
32	9191	2	80	4
33	1001	1	14	8

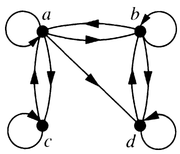
11. 这个等式的两边选择了由满足 C_1 和 C_2 两个条件的那些 n 元组构成的子集。
12. 这个等式的两边选择了在 R 中，在 S 中，并且满足条件 C 的那些 n 元组构成的子集。
13. 这个等式的两边选择了在 R 或 S 中，由 n 元组的第 i_1，第 i_2，…，第 i_m 分量构成的 m 元组。
14. 设 $R=\{(a,b)\}$，$S=\{(a,c)\}$，$n=2$，$m=1$ 并且 $i_1=1$；$P_1(R-S)=\{(a)\}$，但是 $P_1(R)-P_1(S)=\varnothing$。
15. a) J_2 被 $P_{1,3}$ 跟随着
    b) (23，1)，(23，3)，(31，3)，(32，4)
16. 没有主键。

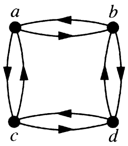
5.3 节

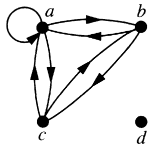
1. a) $\begin{bmatrix}111\\000\\000\end{bmatrix}$　b) $\begin{bmatrix}010\\110\\001\end{bmatrix}$　c) $\begin{bmatrix}111\\011\\001\end{bmatrix}$　d) $\begin{bmatrix}001\\000\\100\end{bmatrix}$
2. a) (1，1)，(1，3)，(2，2)，(3，1)，(3，3)
    b) (1，2)，(2，2)，(3，2)
    c) (1，1)，(1，2)，(1，3)，(2，1)，(2，3)，(3，1)，(3，2)，(3，3)
3. R 是反自反的当且仅当关系矩阵主对角线上的元素全部是 0。
4. a) 自反的、对称的、传递的
    b) 反对称的、传递的
    c) 对称的
5. a) 4950　b) 9900　c) 99　d) 100　e) 1
6. 把每个 0 变成 1 并且把每个 1 变成 0。
7. a) $\begin{bmatrix}011\\110\\101\end{bmatrix}$　b) $\begin{bmatrix}100\\001\\010\end{bmatrix}$　c) $\begin{bmatrix}111\\111\\111\end{bmatrix}$
8. a) $\begin{bmatrix}001\\110\\011\end{bmatrix}$　b) $\begin{bmatrix}110\\011\\111\end{bmatrix}$　c) $\begin{bmatrix}011\\111\\111\end{bmatrix}$
9. n^2-k
10. $\{(a,b),(a,c),(b,c),(c,b)\}$
11. (a,c)，(b,a)，(c,d)，(d,b)
12. $\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(d,d)\}$
13. 关系是非对称的，当且仅当有向图没有自环，也没有长度为 2 的封闭路径。
14. 练习 23：反自反的。练习 24：自反的、反对称的、传递的。练习 25：反自反的、反对称的。
15. 把 R 的有向图的每条边的方向倒转。
16. 用数学归纳法证明。
    基础步骤：$n=1$ 是平凡的。
    归纳步骤：假设对 k 为真。因为 $R^{k+1}=R^k\circ R$，它的矩阵是 $\mathbf{M}_R\odot\mathbf{M}_{R^k}$，由归纳假设就是 $\mathbf{M}_R\odot\mathbf{M}_R^{[k]}=\mathbf{M}_R^{[k+1]}$。

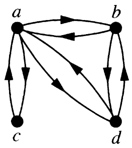
5.4 节

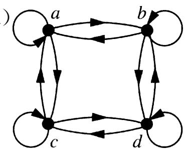
1. a) $\{(0,0),(0,1),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,0),(3,3)\}$
    b) $\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0)\}$
2. $\{(a,b)\mid a$ 整除 b 或 b 整除 $a\}$
3. 

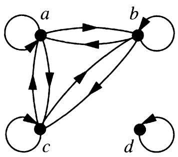
4. 

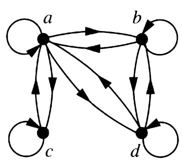
5. a) 

b) 

c) 

6. a) 

b) 

c) 

7. R 的对称闭包是 $R\cup R^{-1}$。$\boldsymbol{M}_{R\cup R^{-1}}=\boldsymbol{M}_R \vee \boldsymbol{M}_{R^{-1}}=\boldsymbol{M}_R \vee \boldsymbol{M}_R^{\mathrm{T}}$。

8. 仅当 R 是反自反关系时，它就是它自己的闭包。

9. a){(1，1)，(1，5)，(2，3)，(3，1)，(3，2)，(3，3)，(3，4)，(4，1)，(4，5)，(5，3)，(5，4)}

   b){(1，1)，(1，2)，(1，3)，(1，4)，(2，1)，(2，5)，(3，1)，(3，3)，(3，4)，(3，5)，(4，1)，(4，2)，(4，3)，(4，4)，(5，1)，(5，3)，(5，5)}

   c){(1，1)(1，3)，(1，4)，(1，5)，(2，1)，(2，2)，(2，3)，(2，4)，(3，1)，(3，2)，(3，3)，(3，4)，(3，5)，(4，1)，(4，3)，(4，4)，(4，5)，(5，1)，(5，2)，(5，3)，(5，4)，(5，5)}

   d){(1，1)，(1，2)，(1，3)，(1，4)，(1，5)，(2，1)，(2，3)，(2，4)，(2，5)，(3，1)，(3，2)，(3，3)，(3，4)，(3，5)，(4，1)，(4，2)，(4，3)，(4，4)，(4，5)，(5，1)，(5，2)，(5，3)，(5，4)，(5，5)}

   e){(1，1)，(1，2)，(1，3)，(1，4)，(1，5)，(2，1)，(2，2)，(2，3)，(2，4)，(2，5)，(3，1)，(3，2)，(3，3)，(3，4)，(3，5)，(4，1)，(4，2)，(4，3)，(4，4)，(4，5)，(5，1)，(5，2)，(5，3)，(5，4)，(5，5)}

   f){(1，1)，(1，2)，(1，3)，(1，4)，(1，5)，(2，1)，(2，2)，(2，3)，(2，4)，(2，5)，(3，1)，(3，2)，(3，3)，(3，4)，(3，5)，(4，1)，(4，2)，(4，3)，(4，4)，(4，5)，(5，1)，(5，2)，(5，3)，(5，4}，(5，5)}

10. a)如果有学生 c，使得 a 和 c 在同一个班，那么 c 和 b 也在同一个班。

    b)如果有两个学生 c 和 d，使得 a 和 c 在同一个班，且 c 和 d 在同一个班，那么 d 和 b 也在同一个班。

    c)如果存在学生序列 $s_0\ s_1$，s_n $(n\geqslant 1)$，使得 $s_0=a$，$s_n=b$，且对于每个 $i=1,2,\cdots,n$，s_is_{i-1} 在一个班。

11. 从 $(R^*)^{-1}=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n\right)^{-1}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(R^n)^{-1}=\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n=R^*$ 题得证。

12. a) $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$　b) $\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$　c) $\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$　d) $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$

13. 答案与练习 12 一样。

14. a){(1，1)，(1，2)，(1，4)，(2，2)，(3，3)，(4，1)，(4，2)，(4，4)}

    b){(1，1)，(1，2)，(1，4)，(2，1)，(2，2)，(2，4)，(3，3)，(4，1)，(4，2)，(4，4)}

    c){(1，1)，(1，2)，(1，4)，(2，1)，(2，2)，(2，4)，(3，3)，(4，1)，(4，2)，(4，4)}

15. 算法 1：$O(n^{3.8})$；算法 2：$O(n^3)$。

16. 初始令 $\boldsymbol{A}:=\boldsymbol{M}_R \vee \boldsymbol{I}_n$ 且只对 $i:=2$ 到 $n-1$ 循环。

17. a)因为 R 是自反的，所以每个包含它的关系也一定是自反的。

b){(0，0)，(0，1)，(0，2)，(1，1)，(2，2)}和{(0，0)，(0，1)，(1，0)，(1，1)，(2，2)}都包含 R 且都有奇数个元素，但是其中的每一个都不是另一个的子集。

5.5 节

1. a)等价关系 b)不是自反的，也不是传递的 c)等价关系 d)不是传递的 e)不是对称的，也不是传递的

2. a)等价关系 b)不是传递的 c)不是自反的，不是对称的，也不是传递的 d)等价关系 e)不是自反的，也不是传递的

3. 有多种答案。

(1)若两座建筑物在同一年落成，则两者是等价的；等价类由某个给定年份落成的建筑物的集合构成(这一年至少有一座建筑物落成)。

(2)若两座建筑物具有相同楼层，则两者是等价的；等价类分别是一层建筑物的集合，两层建筑物的集合等(层数为 n 的等价类中至少含有一个 n 层建筑物)。

(3)有一个类的每个建筑物等价于有一个类的每个建筑物(包括自身)，没有一个类的每个建筑物等价于没有一个类的每个建筑物(包括自身)。存在两个等价类：有类的建筑物集合和没有类的建筑物集合(假设它们非空)。

4. 语句“p 等价于 q”意味着 p 和 q 在真值表中有相同的值。R 自反的，因为 p 与 p 有相同的真值表。R 是对称的，因为如果 p 和 q 有相同的真值表，那么 q 和 p 有相同的真值表。如果 p 和 q 在它们的真值表中有相同的值，并且 q 和 r 在它们的真值表中有相同的值，那么 p 和 r 在它们的真值表中有相同的值，因此，R 是传递的。T 的等价类是所有永真式的集合，F 的等价类是所有矛盾式的集合。

5. a)因为 $f(x)=f(x)$，所以 $(x,x)\in R$。因此 R 是自反的。$(x,y)\in R$ 当且仅当 $f(x)=f(y)$，当且仅当 $f(y)=f(x)$，当且仅当 $(y,x)\in R$。因此 R 是对称的。如果 $(x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in R$，那么 $f(x)=f(y)$ 且 $f(y)=f(z)$，因此 $f(x)=f(z)$。于是 $(x,z)\in R$，这就证明 R 是传递的。

b)对于 f 的值域中的 b，得到 $f^{-1}(b)$ 集合。

6. 设 x 是长度至少为 3 的串，由于 x 与自己在前 3 位相同，所以 $(x,x)\in R$，因此 R 是自反的。假设 $(x,y)\in R$，那么 x 与 y 在前 3 位相同，因此 y 与 x 也在前 3 位相同，于是 $(y,x)\in R$。如果 (x,y) 和 (y,z) 在 R 中，那么 x 和 y 在前 3 位相同，y 和 z 也在前 3 位相同。因此 x 和 z 在前 3 位相同。从而 $(x,z)\in R$。于是 R 是传递的。

7. 由练习 5 得出，函数 f 是将一个长度至少为 3 的位串转换成由该串的第 1 位和第 3 位构成的序偶。

8. 因为 $a+b=b+a$，所以 $((a,b),(a,b))\in R$，因此 R 是自反的。若 $((a,b),(c,d))\in R$，则 $a+d=b+c$，于是 $c+b=d+a$，则 $((c,d),(a,b))\in R$，因此 R 是对称的。若 $((a,b),(c,d))\in R$ 和 $((c,d),(e,f))\in R$，则 $a+d=b+c$ 且 $c+e=d+f$，于是 $a+d+c+e=b+c+d+f$，可得 $a+e=b+f$，即 $((a,b),(e,f))\in R$，因此 R 是传递的。用代数表述解法更为简单，已知条件可表示为 $f((a,b))=f((c,d))$，其中 $f((x,y))=x-y$，则由练习 5 可得出，R 是个等价关系。

9. a)由练习 5 得出。其中从(**R** 到 **R** 的)可微分函数集合到(**R** 到 **R** 的)函数集合的函数 f 是微分运算。

b)对某个常数 C，形为 $g(x)=x^2+C$ 的所有函数的集合。

10. a)由练习 5 得出。其中 f 是从所有 URL 的集合到所有 Web 页集合的函数，f 对每个 URL 的赋值是关于这个 URL 的 Web 页。

11. 不是

12. 不是

13. R 是自反的，因为位串 s 和它自己有相同数量的 1。R 是对称的，因为 s 和 t 有相同数量的 1 推出 t 和 s 也有相同数量的 1。R 是传递的，因为如果 s 与 t 有相同数量的 1，t 与 u 有相同数量的 1，那么 s 与 u 也有相同数量的 1。

14. 所有恰好具有 2 个 1 的位串的集合

15. a) $[2]_5=\{i \mid i\equiv 2 \pmod 5\}=\{\cdots,-8,-3,2,7,12,\cdots\}$

b) $[3]_5=\{i \mid i\equiv 3 \pmod 5\}=\{\cdots,-7,-2,3,8,13,\cdots\}$

c) $[6]_5=\{i \mid i\equiv 6 \pmod 5\}=\{\cdots,-9,-4,1,6,111,\cdots\}$

d) $[-3]_5=\{i \mid i\equiv -3(\mathrm{mod}\ 5)\}=\{\cdots, -8, -3, 2, 7, 12, \cdots\}$

16. $\{6n+k \mid n\in \mathbf{Z}\}$，$k\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

17. a) $[(1, 2)]=\{(a, b) \mid a-b=-1\}=\{(1, 2), (3, 4), (4, 5), (5, 6), \cdots\}$

b)每个等价类可以理解为一个整数(正，负或 0)，特别地$[(a, b)]$可以理解为 $a-b$。

18. a)不是 b)是 c)是 d)不是

19. (a)，(c)，(e)

20. (b)，(d)，(e)

21. a) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$

b) $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$

c) $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$

d) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

22. $[0]_6\subseteq[0]_3$，$[1]_6\subseteq[1]_3$，$[2]_6\subseteq[2]_3$，$[3]_6\subseteq[0]_3$，$[4]_6\subseteq[1]_3$，$[5]_6\subseteq[2]_3$

23. 设 A 是在第一个划分中的集合。取 A 中一个特定元素 x。所有 16 位长且与 x 在后 8 位相同的位串的集合是在第二个划分中的一个集合。显然，A 中的每个串都在这个集合里。

24. 我们知道：等价类 $[X]_{R_{31}}$ 是等价类 $[X]_{R_8}$ 的子集。为了证明这条结论，任取元素 $y\in[X]_{R_{31}}$，则 y 与 R_{31} 中的 x 等价，所以，或者 $y=x$，或者 y 和 x 都至少含有 31 个字符且它们的前 31 个字符相同。因此，至少含有 31 个字符且前 31 个字符相同的字符串，它们至少含有 8 个字符且前 8 个字符也相同。于是，或者 $y=x$，或者 y 和 x 都至少含有 8 个字符且它们的前 8 个字符相同。也就是说，则 y 与 R_8 中的 x 等价，因此$y\in[X]_{R_8}$。

25. $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, d), (d, e), (e, d), (e, e)\}$

26. a) $\mathbf{Z}$ b) $\{n+\frac{1}{2} \mid n\in\mathbf{Z}\}$

27. a) R 是自反的，因为任何涂色方案通过旋转 360 度可以从自身得到。每个旋转是两个翻转的合成，相反，两个翻转的合成也是一个旋转。由这个事实可以说明 R 是对称和传递的。(C_1, C_2)属于 R 当且仅当 C_2 可以通过翻转的合成由 C_1 得到。如果(C_1, C_2)属于 R，那么由于翻转合成的逆也是翻转的合成(按照相反的次序)，(C_2, C_1)也属于 R。于是 R 是对称的。假设(C_1, C_2)和(C_2, C_3)都属于 R，取每种情况下翻转的合成得到的仍是翻转的合成，因此(C_1, C_3)属于 R，R 是传递的。

b)我们用长度为 4 的序列表示涂色，r 和 b 分别代表红和蓝。我们按照左上方格、右上方格、左下方格、右下方格的次序列出表示颜色的字母。等价类是：$\{rrrr\}$，$\{bbbb\}$，$\{rrrb, rrbr, rbrr, brrr\}$，$\{bbbr, bbrb, brbb, rbbb\}$，$\{rbbr, brrb\}$，$\{rrbb, brbr, bbrr, rbrb\}$。

28. 5

29. 是

30. R

31. 首先构成 R 的自反闭包，然后构成这个自反闭包的对称闭包，最后构成自反闭包的对称闭包的传递闭包。

5.6 节

1. a)是偏序 b)不是反对称的，不是传递的 c)是偏序
d)是偏序 e)不是反对称的，不是传递的

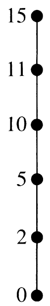
2. a)不是 b)不是 c)是

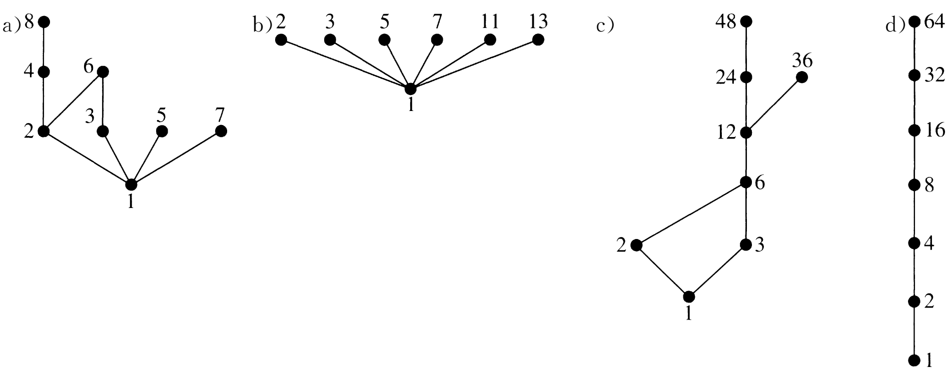
3. a)是 b)不是 c)是 d)不是

4. a)不是 b)是 c)不是

5. 不是

6. 是

7. a)$\{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$
   b)$(\mathbf{Z}, \leqslant)$
   c)$(P(\mathbf{Z}), \subseteq)$
   d)($\mathbf{Z}^+$ ，“是倍数”)
8. a)例如，$\{0\}$和$\{1\}$　b)例如，4 和 6
9. a)$(1, 1, 2) < (1, 2, 1)$　b)$(0, 1, 2, 3) < (0, 1, 3, 2)$
   c)$(0, 1, 1, 1, 0) < (1, 0, 1, 0, 1)$
10. $0 < 0001 < 001 < 01 < 010 < 0101 < 011 < 11$
11.


12.


13. (a, b)，(a, c)，(a, d)，(b, c)，(b, d)，(a, a)，(b, b)，(c, c)，(d, d)
14. (a, a)，(a, g)，(a, d)，(a, e)，(a, f)，(b, b)，(b, g)，(b, d)，(b, e)，(b, f)，(c, c)，(c, g)，(c, d)，(c, e)，(c, f)，(g, d)，(g, e)，(g, f)，(g, g)，(d, d)，(e, e)，(f, f)
15. $(\varnothing, \{a\})$，$(\varnothing, \{b\})$，$(\varnothing, \{c\})$，$(\{a\}, \{a, b\})$，$(\{a\}, \{a, c\})$，$(\{b\}, \{a, b\})$，$(\{b\}, \{b, c\})$，$(\{c\}, \{a, c\})$，$(\{c\}, \{b, c\})$，$(\{a, b\}, \{a, b, c\})$，$(\{a, c\}, \{a, b, c\})$，$(\{b, c\}, \{a, b, c\})$
16. 设$(S, \leqslant)$是有穷偏序集。我们将证明这个偏序集是它的覆盖关系的自反传递闭包。假设(a, b)属于覆盖关系的自反传递闭包。那么 $a=b$ 或 $a<b$，因此 $a \leqslant b$；或者存在一个序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 使得 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b$，在这种情况下，由$\leqslant$的传递性，也有 $a \leqslant b$。反之，假设 $a<b$，如果 $a=b$，那么(a, b)属于覆盖关系的自反传递闭包。如果 $a<b$ 并且不存在 z 使得 $a<z<b$，那么(a, b)属于覆盖关系并且因此属于它的自反传递闭包。否则，设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b$ 是这种形式的最长的序列(由于偏序集是有穷的，所以存在这样的序列)，那么中间不会有其他元素插入，因此每个对(a, a_1)，(a_1, a_2)，$\cdots$，(a_n, b)属于覆盖关系，从而(a, b)也属于它的自反传递闭包。
17. a)24，45　b)3，5　c)不存在　d)不存在
    e)15，45　f)15　g)15，5，3　h)15
18. a)$\{1, 2\}$，$\{1, 3, 4\}$，$\{2, 3, 4\}$　b)$\{1\}$，$\{2\}$，$\{4\}$
    c)不存在　d)不存在　e)$\{2, 4\}$，$\{2, 3, 4\}$　f)$\{2, 4\}$
    g)$\{3, 4\}$，$\{4\}$h)$\{3, 4\}$
19. 因为$(a, b) \leqslant (a, b)$，所以$\leqslant$是自反的。如果$(a_1, a_2) \leqslant (b_1, b_2)$并且$(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$，那么或者

$a_1 \prec b_1$，或者 $a_1=b_1$ 并且 $a_2 \prec b_2$。在两种情况下，(b_1, b_2)都不小于等于(a_1, a_2)。因此$\preccurlyeq$是反对称的。假设$(a_1, a_2) \prec (b_1, b_2) \prec (c_1, c_2)$。那么如果 $a_1 \prec b_1$ 或 $b_1 \prec c_1$，我们有 $a_1 \prec c_1$，所以$(a_1, a_2) \prec (c_1, c_2)$。但是如果 $a_1=b_1=c_1$，那么 $a_2 \prec b_2 \prec c_2$，这也推出$(a_1, a_2) \prec (c_1, c_2)$，于是$\preccurlyeq$是传递的。

20. 因为$(s, t) \preccurlyeq (s, t)$，所以$\preccurlyeq$是自反的。如果$(s, t) \preccurlyeq (u, v)$并且$(u, v) \preccurlyeq (s, t)$，那么 $s \leqslant u \leqslant s$ 且 $t \leqslant v \leqslant t$；从而 $s=u$ 且 $t=v$。因此$\preccurlyeq$是反对称的。假设$(s, t) \preccurlyeq (u, v) \preccurlyeq (w, x)$，那么 $s \leqslant u$，$t \leqslant v$，$u \leqslant w$，$v \leqslant x$，从而有 $s \leqslant w$ 和 $t \leqslant x$，因此$(s, t) \preccurlyeq (w, x)$。于是$\preccurlyeq$是传递的。
21. a)假设 x 是极大元素并且 y 是最大元素，那么 $x \preccurlyeq y$。因为 x 不小于 y，从而 $x=y$。由练习 40a)，y 是唯一的。因此 x 也是唯一的。

    b)假设 x 是极小元素并且 y 是最小元素，那么 $x \succcurlyeq y$。由于 x 不大于 y，从而 $x=y$。由练习 40b)，y 是唯一的。因此 x 也是唯一的。
22. a)是　b)不是　c)是
23. 使用数学归纳法。设 $P(n)$是“格的每个 n 元子集有最小上界和最大下界”。

    基础步骤：$P(1)$为真，因为$\{x\}$的最小上界和最大下界都是 x。

    归纳步骤：假设 $P(k)$为真。令 S 是$n+1$ 元素集合。设 $x \in S$ 并且 $S'=S-\{x\}$。因为 S'有 k 个元素，所以由归纳假设有最小上界 y 和最大下界 a。由于这是一个格，所以存在元素 $z=\mathrm{lub}(x, y)$和 $b=\mathrm{glb}(x, a)$。如果我们可以证明 z 是 S 的最小上界和 b 是 S 的最大下界，那么命题得证。为证明 z 是 S 的最小上界，首先注意如果 $w \in S$，那么 $w=x$ 或 $w \in S'$。如果 $w=x$，因为 z 是 x 和 y 的最小上界，所以有 $w \preccurlyeq z$。如果 $w \in S'$，由于 y 是 S'的最小上界，所以 $w \preccurlyeq y$，且由于 $z=\mathrm{lub}(x, y)$，所以有 $y \preccurlyeq z$，因此 $w \preccurlyeq z$。为证明 z 是 S 的最小上界，假设 u 是 S 的一个上界，那么元素 u 一定是 x 和 y 的一个上界，但是由于 $z=\mathrm{lub}(x, y)$，所以有 $z \preccurlyeq u$。类似的论述可以证明 b 是 S 的最大下界。
24. a)不允许　　　　b)允许

    c)(私有的，{猎豹，美洲狮})，(受限制的，{猎豹，美洲狮})，(注册的，{猎豹，美洲狮})，(私有的，{猎豹，美洲狮，黑斑羚})，(受限制的，{猎豹，美洲狮，黑斑羚})，(注册的，{猎豹，美洲狮，黑斑羚})

    d)(非私有的，{黑斑羚，美洲狮})，(私有的，{黑斑羚，美洲狮})，(受限制的，{黑斑羚，美洲狮})，(非私有的，{黑斑羚})，(私有的，{黑斑羚})，(受限制的，{黑斑羚})，(非私有的，{美洲狮})，(私有的，{美洲狮})，(受限制的，{美洲狮})，(非私有的，$\varnothing$)，(私有的，$\varnothing$)，(受限制的，$\varnothing$)
25. 设 Π 是集合 S 的所有划分的集合，如果划分 P_1 是 P_2 的加细，即如果 P_1 中的每个集合都是 P_2 中某个集合的子集，则 $P_1 \preccurlyeq P_2$。首先我们证明$(\Pi, \preccurlyeq)$是偏序集。由于对每个划分 P 有 $P \preccurlyeq P$，所以$\preccurlyeq$是自反的。现在假设 $P_1 \preccurlyeq P_2$ 并且 $P_2 \preccurlyeq P_1$，令 $T \in P_1$，因为 $P_1 \preccurlyeq P_2$，所以存在集合 $T' \in P_2$ 使得 $T \subseteq T'$；又因为$P_2 \preccurlyeq P_1$，所以存在集合 $T'' \in P_1$ 使得 $T' \subseteq T''$，从而 $T \subseteq T''$。但是因为 P_1 是划分，所以由 $T=T''$和 $T \subseteq T' \subseteq T''$推出 $T=T'$，于是 $T \in P_2$。反之，通过交换 P_1 与 P_2 同样得出 P_2 的每个子集也在 P_1 中。因此$P_1=P_2$ 并且$\preccurlyeq$是反对称的。下面假设 $P_1 \preccurlyeq P_2$ 并且 $P_2 \preccurlyeq P_3$。设 $T \in P_1$，那么存在集合 $T' \in P_2$ 使得 $T \subseteq T'$。由于 $P_2 \preccurlyeq P_3$，所以存在集合 $T'' \in P_3$ 使得 $T' \subseteq T''$，从而有 $T \subseteq T''$，因此 $P_1 \preccurlyeq P_3$。即$\preccurlyeq$是传递的。划分 P_1 和 P_2 的最大下界是划分 P，P 的子集都是形如 $T_1 \cap T_2$ 的非空集合，其中 $T_1 \in P_1$ 且$T_2 \in P_2$。关于这个结论的理由不再赘述。划分 P_1 与 P_2 的最小上界是对应于下述等价关系的划分。$x \in S$ 关系到 $y \in S$，如果对某个非负整数 n 存在序列 $x=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n=y$，使得对从 $1 \sim n$ 的每个 i，x_{i-1}和 x_i 在 P_1 或者在 P_2 的同一个元素中。我们不再详细证明这是一个等价关系，也不再证明它就是两个划分的最小上界。
26. 由练习 23，对整个有穷格存在最小上界和最大下界。根据定义，这些元素分别是最大元素和最小元素。
27. $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ 子集的最小元素是具有最小的横坐标的对，并且如果存在多个这样的对，那么它就是这些对中具有最小的纵坐标的对。
28. 如果 x 是这个偏序集元素的一个递减序列中的整数，那么在这个序列中至多$|x|$个元素可能跟随着 x，即绝对值为$|x|-1$，$|x|-2$，…，1，0 的整数。因此不可能存在无穷递减序列。这不是一个全序集，例如 5 和-5 是不可比的。

29. 为找出两个有理数中哪一个更大，把它们写成具有相同正分母的分数并且比较它们的分子。为证明这个集合是稠密的，假设 $x<y$ 是两个有理数。那么它们的平均值，即 $(x+y)/2$ 是一个在它们之间的有理数。
30. 设 $(S, \preccurlyeq)$ 是偏序集，只需证明 S 的每个非空子集包含一个最小元素，当且仅当在 S 中不存在元素的无限递减序列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$（即对所有的 i，$a_{i+1} \prec a_i$）。一个元素的无限递减序列显然没有最小元素。反之，设 A 是 S 的一个没有最小元素的非空子集。由于 A 非空，所以选择 $a_1 \in A$。因为 a_1 不是 A 的最小元素，所以选择 $a_2 \in A$ 且 $a_2 \prec a_1$。因为 a_2 不是 A 的最小元素，所以选择 $a_3 \in A$ 且 $a_3 \prec a_2$。按这种方法继续进行下去，产生一个 S 中的无限递减序列。
31. $1 \prec 5 \prec 2 \prec 4 \prec 12 \prec 20$，
$1 \prec 2 \prec 5 \prec 4 \prec 12 \prec 20$，$1 \prec 2 \prec 4 \prec 5 \prec 12 \prec 20$，
$1 \prec 2 \prec 4 \prec 12 \prec 5 \prec 20$，$1 \prec 5 \prec 2 \prec 4 \prec 20 \prec 12$，
$1 \prec 2 \prec 5 \prec 4 \prec 20 \prec 12$，$1 \prec 2 \prec 4 \prec 5 \prec 20 \prec 12$
32. $A \prec C \prec E \prec B \prec D \prec F \prec G$，$A \prec E \prec C \prec$
$B \prec D \prec F \prec G$，$C \prec A \prec E \prec B \prec D \prec F \prec G$，
$C \prec E \prec A \prec B \prec D \prec F \prec G$，$E \prec A \prec C \prec B \prec$
$D \prec F \prec G$，$E \prec C \prec A \prec B \prec D \prec F \prec G$，$A \prec C \prec$
$B \prec E \prec D \prec F \prec G$，$C \prec A \prec B \prec E \prec D \prec F \prec G$，
$A \prec C \prec B \prec D \prec E \prec F \prec G$，$C \prec A \prec B \prec$
$D \prec E \prec F \prec G$，$A \prec C \prec E \prec B \prec F \prec D \prec G$，
$A \prec E \prec C \prec B \prec F \prec D \prec G$，$C \prec A \prec E \prec$
$B \prec F \prec D \prec G$，$C \prec E \prec A \prec B \prec F \prec D \prec G$，
$E \prec A \prec C \prec B \prec F \prec D \prec G$，$E \prec C \prec A \prec$
$B \prec F \prec D \prec G$，$A \prec C \prec B \prec E \prec F \prec D \prec G$，
$C \prec A \prec B \prec E \prec F \prec D \prec G$
33. 确定用户需求≺写出功能需求≺设置测试点≺开发系统需求≺写文档≺开发模块 A≺开发模块 B≺开发模块 C≺模块集成≺α 测试≺β 测试≺完成

补充练习

1. a)反自反的(这里不包含空串)，对称的
b)反自反的，对称的
c)反自反的，反对称的，传递的
3. 因为 $a+b=a+b$，$((a, b), (a, b)) \in R$，所以 R 是自反的。如果 $((a, b), (c, d)) \in R$，那么 $a+d=b+c$，因此 $c+b=d+a$。从而 $((c, d), (a, b)) \in R$，于是 R 是对称的。假设 $((a, b), (c, d))$ 和 $((c, d), (e, f))$ 属于 R，那么 $a+d=b+c$ 且 $c+f=d+e$。把这两个等式相加，然后从两边减去 $c+d$ 得到 $a+f=b+e$。从而 $((a, b), (e, f))$ 属于 R，于是 R 是传递的。
5. 假设 $(a, b) \in R$。因为 $(b, b) \in R$，所以有 $(a, b) \in R^2$。
7. 是，是
9. 是，是
11. 在投影中具有相同关键字的两个记录在原来的关系中有相同的关键字。
13. $(\Delta \cup R)^{-1} = \Delta^{-1} \cup R^{-1} = \Delta \cup R^{-1}$
15. a) $R=\{(a, b), (a, c)\}$。R 的对称闭包的传递闭包是 $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$，它与 R 的传递闭包的对称闭包是不同的，后者是 $\{(a, b), (a, c), (b, a), (c, a)\}$。
b)假设 (a, b) 属于 R 的传递闭包的对称闭包。必须证明 (a, b) 属于 R 的对称闭包的传递闭包。我们知道 (a, b) 和 (b, a) 中至少有一个属于 R 的传递闭包，因此在 R 中存在一条从 a 到 b 的或从 b 到 a 的路径(或者两条都有)。在前面的情况下，在 R 的对称闭包中存在一条从 a 到 b 的路径。在后面的情况下，我们可以通过把从 b 到 a 路径中的所有的边改变方向向回走，在 R 的对称闭包中构造一条从 a 到 b 的路径。因此 (a, b) 属于 R 的对称闭包的传递闭包。

17. 由于 $R \subseteq S$，所以 S 的关于性质 **P** 的闭包是包含 R 的具有性质 **P** 的关系。因此 S 的关于性质 **P** 的闭包包含了 R 关于性质 **P** 的闭包。

19. 使用沃舍尔(Warshell)算法的基本思想，不同的只是令 $w_{ij}^{[k]}$ 等于使用下标不超过 k 的内部顶点从 u_i 到 u_j 的最长路径的长度，并且如果没有这种路径，则令 $w_{ij}^{[k]}$ 等于 -1。为了从 w_{k-1} 的元素找到 $w_{ij}^{[k]}$，对于每个 (i, j) 对确定是否存在不使用序标大于 k 的顶点从 v_i 到 v_k 的路径和从 v_k 到 v_j 的路径。如果 $w_{ik}^{[k-1]}$ 或 $w_{kj}^{[k-1]}$ 是 -1，那么这对路径不存在，因此置 $w_{ij}^{[k]}=w_{ij}^{[k-1]}$。如果这对路径存在，那么存在两种可能。如果 $w_{kk}^{[k-1]}>0$，那么存在任意长的从 v_i 到 v_j 的路径，因此置 $w_{ij}^{[k]}=\infty$。如果 $w_{kk}^{[k-1]}=0$，置 $w_{ij}^{[k-1]}=\max(w_{ij}^{[k-1]}, w_{ik}^{[k-1]}+w_{kj}^{[k-1]})$(初始取 $\boldsymbol{W}_0=\boldsymbol{M}_R$)。

21. 25

23. 因为 $A_i \cap B_j$ 是 A_i 和 B_j 的子集，所以这些子集的集合是每个给定划分的加细。我们必须证明这是一个划分。根据构造，每个这样的集合是非空的。下面说明这些集合的并就是 S。假设 $s \in S$，因为 P_1 和 P_2 是 S 的划分，所以存在集合 A_i 和 B_j 使得 $s \in A_i$ 且 $s \in B_j$，从而 $s \in A_i \cap B_j$。因此这些集合的并就是 S。为说明它们是两两不相交的，只要注意除非 $i=i'$ 和 $j=j'$，否则 $(A_i \cap B_j) \cap (A_{i'} \cap B_{j'})=(A_i \cap A_{i'}) \cap (A_j \cap A_{j'})=\varnothing$。

25. 子集关系是任何集合族上的偏序，因为它是自反的、反对称的、传递的。这里的集合族是 $\mathbf{R}(S)$。

27. 找菜谱≺买海鲜≺买杂货≺洗海贝≺切姜蒜≺洗鱼≺蒸饭≺切鱼≺洗蔬菜≺切水栗子≺配菜≺烹调≺摆放餐具≺上菜

29. a)具有多个元素的唯一的反链是 $\{c, d\}$。
    b)具有多个元素的反链只有 $\{b, c\}$，$\{c, e\}$ 和 $\{d, e\}$。
    c)具有多个元素的反链只有 $\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{b, c\}$，$\{a, b, c\}$，$\{d, e\}$，$\{d, f\}$，$\{e, f\}$，$\{d, e, f\}$。

31. 设 $(S, \preccurlyeq)$ 是有穷偏序集，且 A 是一条极大链。因为 $(A, \preccurlyeq)$ 也是一个偏序集，所以它一定有极小元素 m。假设 m 不是 S 中的极小元素，那么存在 S 中的元素 a 使得 $a \prec m$。但是，这就使得集合 $A \cup \{a\}$ 变成比 A 更大的链。为此我们需要证明 a 与 A 中每一个元素都可比。因为 m 与 A 中每个元素都可比，并且 m 是极小元素，所以当 x 属于 A 且 $x \neq m$ 时有 $m \prec x$。由于 $a \prec m$ 且 $m \prec x$，所以由传递性，对于 A 中的每个元素 x，有 $a \prec x$。

33. 令 aRb 表示 a 是 b 的后代。由练习 32，如果不存在 $n+1$ 个人的集合使得其中每个人都不是其他人的后代(一条反链)，那么 $k \leqslant n$。因此这个集合可以被划分成 $k \leqslant n$ 条链。根据鸽巢原理，这些链中至少有一条链包含至少 $m+1$ 个人。

35. 我们通过反证法证明，如果 S 没有无限递减序列，且 $\forall x((\forall y(y \prec x \rightarrow P(y))) \rightarrow P(x))$，那么 $P(x)$ 对所有的 $x \in S$ 为真。如果 $P(x)$ 为真不是对所有的 $x \in S$ 成立，设 x_1 是一个使得 $P(x_1)$ 不为真的 S 的元素。那么根据已知的提示，一定是 $\forall y(y \prec x_1 \rightarrow P(y))$ 不为真。这意味着存在某个 $x_2(x_2 \prec x_1)$ 使得 $P(x_2)$ 不为真。再次使用这个提示，我们得到 $x_3 \prec x_2$ 使得 $P(x_3)$ 不为真，以此类推。这与偏序集的良基性相矛盾。因此 $P(x)$ 对所有的 $x \in S$ 为真。

37. 假设 R 是拟序。因为 R 是自反的，所以如果 $a \in A$，那么有 $(a, a) \in R$，从而有 $(a, a) \in R^{-1}$。因此 $a \in R \cap R^{-1}$。于是 $R \cap R^{-1}$ 是自反的。对任何关系 R，$R \cap R^{-1}$ 是对称的，因为对任何关系 R，如果 $(a, b) \in R$，那么有 $(b, a) \in R^{-1}$；反之也对。为证明 $R \cap R^{-1}$ 是传递的，假设 $(a, b) \in R \cap R^{-1}$ 并且 $(b, c) \in R \cap R^{-1}$。因为 R 是传递的，所以由 $(a, b) \in R$ 和 $(b, c) \in R$ 推出 $(a, c) \in R$。类似地，由 $(a, b) \in R^{-1}$ 和 $(b, c) \in R^{-1}$，就有 $(b, a) \in R$ 和 $(c, b) \in R$，因此 $(c, a) \in R$，从而 $(a, c) \in R^{-1}$。于是 $(a, c) \in R \cap R^{-1}$。从而证明了 $R \cap R^{-1}$ 是等价关系。

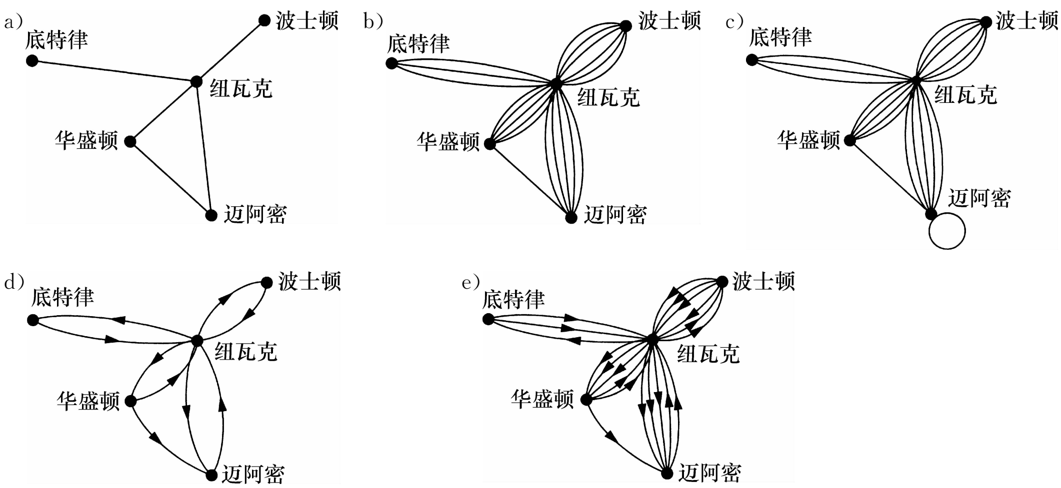
39. a)因为 $\mathrm{glb}(x, y)=\mathrm{glb}(y, x)$ 和 $\mathrm{lub}(x, y)=\mathrm{lub}(y, x)$，所以有 $x \wedge y=y \wedge x$ 和 $x \vee y=y \vee x$。
    b)使用定义，$(x \wedge y) \wedge z$ 是 x、y 与 z 的下界，且大于每一个其他的下界。因为 x、y 和 z 是可互换的，所以 $x \wedge (y \wedge z)$ 是同一元素。类似地，$(x \vee y) \vee z$ 是 x、y 与 z 的上界并且小于每一个其他的上界。因为 x、y 和 z 是可互换的，所以 $x \vee (y \vee z)$ 也是同一元素。
    c)为证明 $x \wedge (x \vee y)=x$，只需证明 x 是 x 与 $x \vee y$ 的最大下界。注意 x 是 x 的下界，根据定义 $x \vee y$ 大于 x，x 也是它的下界。所以 x 是 x 与 $x \vee y$ 的下界。但是 x 的任何下界必须小于或等于 x，因此 x 是最大的下界。第二个公式是第一个公式的对偶式，证明省略。

d) x 是自己与自己的下界，也是自己与自己的上界，并且也是其中的最大下界，最小上界。

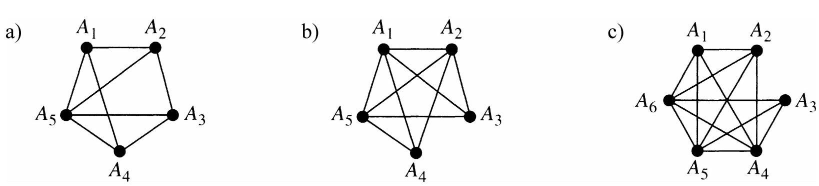
41. a)因为 1 是大于或等于 1 的唯一元素，所以它也是 1 的唯一上界，因此也是 x 和 1 最小上界的唯一可能的值。
    b)因为 $x\leqslant 1$，所以 x 是 x 和 1 的下界并且没有其他的下界可能大于 x，因此 $x\wedge 1=x$。
    c)因为 $0\leqslant x$，所以 x 是 x 和 0 的上界并且没有其他的上界可能小于 x，因此 $x\vee 0=x$。
    d)因为 0 是小于或等于 0 的唯一元素，所以它也是 0 的唯一下界，因此也是 x 和 0 最大下界的唯一可能的值。
43. $L=(S,\subseteq)$，其中 $S=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
45. 是
47. 子集 $X\subseteq S$ 的补是它的补集 $S-X$。为证明这一点，因为 $X\cup(S-X)=S$ 和 $X\cap(S-X)=\varnothing$，所以 $X\vee(S-X)=1$ 且 $X\wedge(S-X)=0$。
49. 考虑用直角坐标网格表示矩阵元素。数值从上到下，内部是从左向右。偏序是 $(a,b)\leqslant(c,d)$ 如果 $a\leqslant c$ 且 $b\leqslant d$。注意 $(1,1)$ 是这个关系的最小元素。第 1 章中解释 Chomp 法则与这里导言所陈述的法则是一致的。但是现在对于所有的 a 和 b，其中 $1\leqslant a\leqslant m$，$1\leqslant b\leqslant n$，我们可以把点 (a,b) 视为自然数 $p^{a-1}q^{b-1}$。这就将直角坐标网格中的点视为这道练习中的集合 S，并且刚刚所描述的偏序 p 与划分关系相同，因为 $p^{a-1}q^{b-1}\mid p^{c-1}q^{d-1}$ 当且仅当左边 p 的指数不超过右边 p 的指数，q 的情况类似。

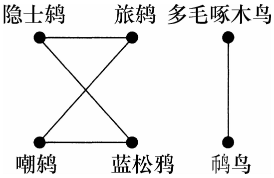
第 6 章

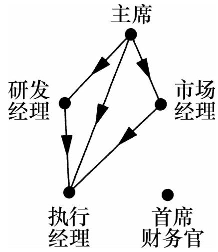
6.1 节

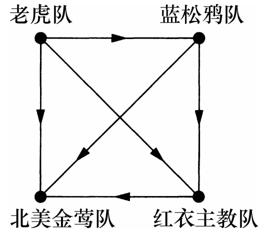
1.


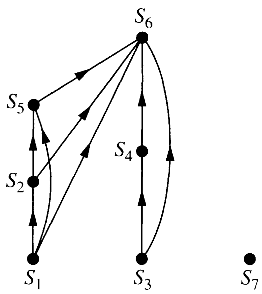
2. 简单图
3. 伪图
4. 有向图
5. 有向多重图
6. 如果 uRv，那么存在与 $\{u,v\}$ 相关联的边。但是 $\{u,v\}=\{v,u\}$，那么这条边与 $\{v,u\}$ 相关联，因此有 vRu。因此由定义可知，R 是对称关系。一个简单图不允许有环，因此 uRu 不成立，所以由定义可知，R 是非自反关系。

7.


8. 

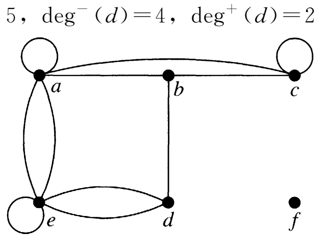
9. 

10. 

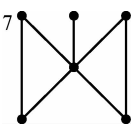
11. 找出在 2 月份的电话呼叫图中有但在 1 月份的电话呼叫图中却没有的电话号码，也找出在 1 月份有但在 2 月份却没有的号码。对于每个找出的号码，利用呼叫图中的边，列出每个号码的呼叫号码表或被叫号码表。检查这些表，找出在与 1 月份停机的号码具有类似呼叫模式的 2 月份的新号码。
12. 利用图模型，用电子邮件地址作为顶点，从发送地址到接收地址连一条边。对于每个电子邮件地址，可以建立其发送地址和接收地址表。如果两个电子邮件地址具有几乎相同的模式，就可以得出结论这些地址可能属于同一个人，而该人最近改变了他的电子邮件地址。
13. 令 V 是参加聚会的人的集合，令 E 是 $V\times V$ 中满足 u 知道 v 的名字的有序对(u, v)的集合，图中的边是有向的，但不允许有多重边。字面上看，在顶点处有环，但是为简单，这个模型可以忽略环。
14. 用点代表课程；边是有向的；边 uv 表示课程 u 是课程 v 的先修课程；没有先修课程的课程是入度为 0 的点；不是任何一门课程的先修课程的课程是出度为 0 的点。
15. 令顶点集合为人的集合，如果两个人结过婚，则把两个顶点用边连起来。忽略掉同性婚姻，这个图就具有这样的性质，即有两种类型的顶点(男人和女人)，每条边都连接相反类型的顶点。
16. 

17. 用顶点表示组里的人。对每对顶点来说，都在图里放置一条有向边。对从表示 A 的顶点到表示 B 的顶点的边来说，若 A 喜欢 B，则用＋(加)号标记，若 A 不喜欢 B，则用－(减)号标记，若 A 对 B 持中立态度，则用 0 标记。

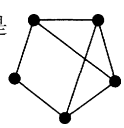
6.2 节

1. $v=6$；$e=6$；$\deg(a)=2$，$\deg(b)=4$，$\deg(c)=1$，$\deg(d)=0$，$\deg(e)=2$，$\deg(f)=3$；c 是悬挂点；d 是孤立点。
2. $v=9$；$e=12$；$\deg(a)=3$，$\deg(b)=2$，$\deg(c)=4$，$\deg(d)=0$，$\deg(e)=6$，$\deg(f)=0$；$\deg(g)=4$；$\deg(h)=2$；$\deg(i)=3$；d 和 f 都是孤立点。
3. 否，因为顶点的度之和不可能是奇数。
4. $v=4$；$e=7$；$\deg^-(a)=3$，$\deg^-(b)=1$，$\deg^-(c)=2$，$\deg(d)=1$，$\deg^+(a)=1$，$\deg^+(b)=2$，$\deg^+(c)=1$，$\deg^+(d)=3$。
5. 5 个顶点，13 条边；$\deg^-(a)=6$，$\deg^+(a)=1$，$\deg^-(b)=1$，$\deg^+(b)=5$，$\deg^-(c)=2$，$\deg^+(c)=5$，$\deg^-(d)=4$，$\deg^+(d)=2$，$\deg^-(e)=0$，$\deg^+(e)=0$。
6. 

7. 具有的合作者人数；从来没有合作过的某个人；只有一个合作者的某个人。
8. 在有向图中，$\deg^-(v)=v$ 收到的呼叫次数，$\deg^+(v)=v$ 发出的呼叫次数；在无向图中 $\deg(v)=$是 v 发出或收到的呼叫次数。
9. $(\deg^+(v), \deg^-(v))$是 v 的胜负记录。
10. 偶图
11. 非偶图
12. 非偶图
13. a)分为$\{h, s, n, w\}$和$\{P, Q, R, S\}$，$E=\{\{P, n\}, \{P, w\}, \{Q, s\}, \{Q, n\}, \{R, n\}, \{R, w\}, \{S, h\}, \{S, s\}\}$
    b)存在
    c)$\{Pw, Qs, Rn, Sh\}$在其他中
14. 只有 Barry 愿意娶 Uma 和 Xia。
15. 用无向偶图建模，如果男女互相愿意娶嫁，则他们之间存在一条边。通过霍尔理论，足以证明对于每一个女人集合，愿意娶她们的男人集合 $N(S)$的基数至少是 $|S|$。令 m 表示 S 和 $N(S)$之间的边数。由于 S 中的每一个顶点的度都为 k，所以满足 $m=k|S|$。因为这些边伴随着 $N(S)$产生，所以 $|N(S)|\geqslant|S|$。
16. a)$(\{a, b, c, f\}, \{\{a, b\}, \{a, f\}, \{b, c\}, \{b, f\}\})$
    b)$(\{a, x, c, f\}, \{\{a, x\}, \{c, x\}, \{e, x\}\})$
17. a)n 个顶点，$n(n-1)/2$ 条边
    b)n 个顶点，n 条边
    c)$n+1$ 个顶点，$2n$ 条边
    d)$m+n$ 个顶点，mn 条边
    e)2^n 个顶点，$n2^{n-1}$ 条边
18. a)3，3，3，3
    b)2，2，2，2
    c)4，3，3，3，3
    d)3，3，2，2，2
    e)3，3，3，3，3，3，3，3
19. n 个顶点中每个都与另外 $n-1$ 个顶点中的每个相邻，因此度序列是 $n-1, n-1, \cdots, n-1$(n 项)。
20. 7 7

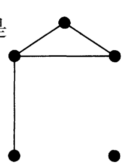


21. a)是



b)否 c)否 d)否

e)是



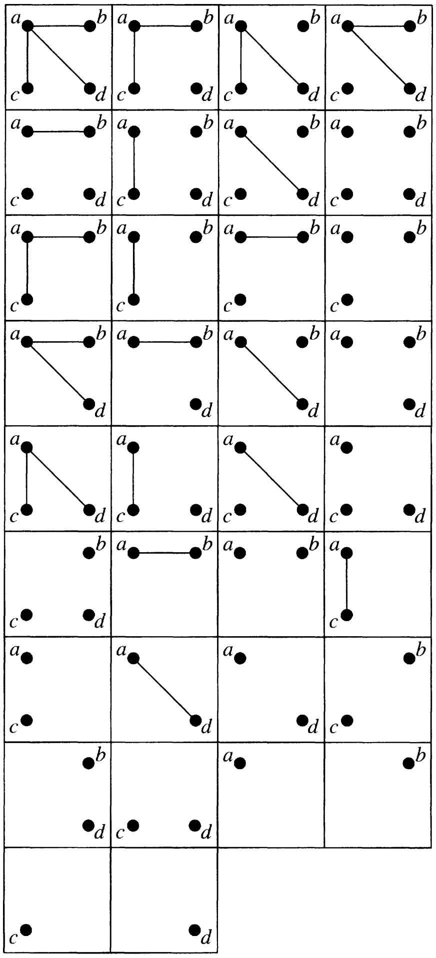
f)否。

22. 首先假设 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 是成图序列。我们必须证明如果项为 $d_2-1, d_3-1, \cdots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \cdots, d_n$ 的序列可以按非递增顺序排列，那么这个序列是成图序列。已经证明，如果原序列是成图序列，那么存在具有这个度序列的成图序列，其中度 d_1 的顶点与度 $d_2, d_3, \cdots, d_{d_1+1}$ 的顶点相邻。从图中去掉有最高度(d_1)的顶点，得到的图就具有所要求的度序列。反之，假设 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 是非递增序列，满足只要序列 $d_2-1, d_3-1, \cdots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \cdots, d_n$ 按非递增顺序排列，它就是成图序列。考虑后者为度序列的图，其中对于 $2\leqslant i\leqslant d_1+1$，顶点 v_i 的度为

d_i-1，对于 $d_1+2\leqslant i\leqslant n$，顶点 v_i 的度为 d_i。连接一个新顶点(记作 v_1)，并且从 v_1 向 v_2，v_3，…，v_{d_1+1} 中的每个顶点连一条边，所得到的图的度序列就是 d_1，d_2，…，d_n。

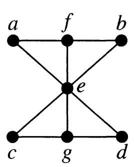
23. 令 d_1，d_2，…，d_n 是和为偶数的非递增非负整数序列。构造图如下：取顶点 v_1，v_2，…，v_n，在顶点 v_i 处有 $\lfloor d_i/2\rfloor$ 个环，其中 $i=1$，2，…，n。对于每个 i，顶点 v_i 的度要么是 d_i 要么是 d_i-1。因为最初的和为偶数，所以 $\deg(v_i)=d_i-1$ 是偶数。把它们任意配对，并且用一条边连接每对中的顶点。

24. 17

25. 

26. a)对所有 $n\geqslant 1$　　b)对所有 $n\geqslant 3$　　c)对 $n=3$　　d)对所有 $n\geqslant 0$

27. 5

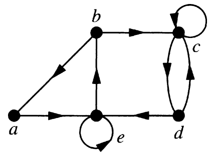
28. 

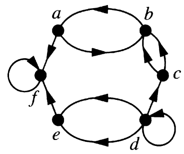
29. a)带 n 个顶点而且没有边的图。　　b) K_m 和 K_n 的不相交并图。
c)带有顶点 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 而且在 v_i 与 v_j 之间有边(除非 $i\equiv j\pm 1(\bmod n)$)的图。
d)用长度为 n 的位串表示其顶点，若两个顶点所对应的位串相差超过一位，则在这两个顶点之间有一条边的图。

30. $v(v-1)/2-e$

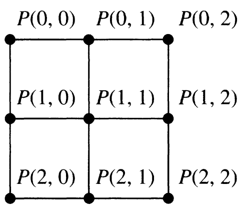
31. $n-1-d_n$，$n-1-d_{n-1}$，…，$n-1-d_2$，$n-1-d_1$

32. G 和 $\overline{G}$ 的并图包含 n 个顶点中每对顶点之间的一条边。因此这个并图是 K_n。

33. 练习 4：

练习 5：

34. 有向图 $G=(V, E)$是它自身的逆图当且仅当它满足条件：$(u, v)\in E$ 当且仅当$(v, u)\in E$。但这恰好是这样的条件：所对应的关系必定是对称的。

35. 

36. 可以这样连接 $P(i, j)$与 $P(k, l)$：用 $|i-k|$ 个跳(hop)连接 $P(i, j)$与 $P(k, j)$，用 $|j-l|$ 个跳连接$P(k, j)$与 $P(k, l)$。因此连接 $P(i, j)$与 $P(k, l)$所需要的跳总数不超过 $|i-k|+|j-l|$。这个值小于或等于 $m+m=2m$，它是 $O(m)$。

6.3 节

1.

顶点	相邻顶点
a	b，c，d
b	a，d
c	a，d
d	a，b，c

2.

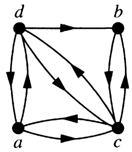
顶点	终结点
a	a，b，c，d
b	d
c	a，b
d	b，c，d

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

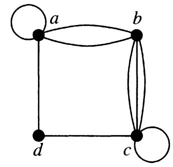
5. a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6. 

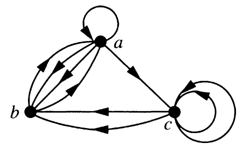
7. $\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&2\\1&1&0&1\\0&2&1&0\end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&2\\2&1&1&0\\1&2&0&1\end{bmatrix}$

9. 

10. $\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix}1&1&2&1\\1&0&0&2\\1&0&1&1\\0&2&1&0\end{bmatrix}$

12. 

13. 是

14. 练习 7：$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&0\\1&1&0&0&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}$　　练习 8：$\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&0&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&1&1&0&1\end{bmatrix}$

15. $\deg(v)$－在 v 处的环数；$\deg^-(v)$

16. 若 e 不是环则是 2，若 e 是环则是 1。

17. 同构　　18. 同构　　19. 同构　　20. 非同构　　21. 同构

22. G 通过恒等函数与自身同构，所以同构是自反的。假设 G 同构于 H，则存在从 G 到 H 的一一对应 f，f 保持相邻性与非相邻性。所以 f^{-1} 是从 H 到 G 的一一对应，f^{-1} 保持相邻性与非相邻性。因此同构是对称的。若 G 同构于 H 并且 H 同构于 K，则存在从 G 到 H 和从 H 到 K 的一一对应 f 和 g，f 和 g 保持相邻性与非相邻性。所以 $g\circ f$ 是从 G 到 K 的一一对应 f，$g\circ f$ 保持相邻性与非相邻性。因此同构是传递的。

23. 全是 0

24. 这样标记顶点，使得顶点集划分中第一个集合的所有顶点都排在前面。由于没有边连接同一划分集内的顶点，所有矩阵具有所需要的形式。

25. C_5

26. 只有 $n=5$

27. 4 个

28. a)是　　b)否　　c)否

29. $G=(V_1, E_1)$同构于 $H=(V_2, E_2)$，当且仅当存在从 V_1 到 V_2 的函数 f 和从 E_1 到 E_2 的函数 g，使得 f 和 g 都是一一对应，并且对于 E_1 中的每条边 e，$g(e)$的端点是 $f(v)$和 $f(w)$，其中 v 和 w 是 e 的端点。

30. 是

31. 否

32. 若 f 是从有向图 G 到有向图 H 的同构，则 f 也是从 G^{conv} 到 H^{conv} 的同构。为了看出这一点，注意(u, v)是 G^{conv} 的边，当且仅当(u, v)是 G 的边，当且仅当$(f(u), f(v))$是 H 的边，当且仅当$(f(u), f(v))$是 H^{conv} 的边。

33. 答案可能有很多，例如 C_6 和 $C_3\cup C_3$。

34. 乘积矩阵是$[a_{ij}]$，其中当 $i\neq j$ 时，a_{ij} 是从 v_i 到 v_j 的边数，a_{ii} 是与 v_i 关联的边数。

35. 练习 20 中的图就是魔鬼对。

6.4 节

1. a)长度为 4 的通路；非回路；非简单通路　　b)非通路
   c)非通路　　d)长度为 5 的简单回路
2. 非连通
3. 非连通
4. 具有下列性质的人的极大集：对于其中任意二人，可以找到从一个人通向另一个人的熟人关系串。
5. 如果一个人的爱尔特希数为 n，则在合作关系图中存在从该人到爱尔特希的长为 n 的路径，根据定义，

这意味着该人与爱尔特希在同一个分支中。如果一个人与爱尔特希在同一个分支中，则存在从该人到爱尔特希的路径，最短的这种路径的长度就是该人的爱尔特希数。

6. a)弱连通　　b)弱连通　　c)不是强连通也不是弱连通

7. 电话号码的极大集，对于其中任意两个不同的号码，可以找出二者之间的有向路径。

8. a)$\{a, b, f\}$，$\{c, d, e\}$

   b)$\{a, b, c, d, e, h\}$，$\{f\}$，$\{g\}$

   c)$\{a, b, d, e, f, g, h, i\}$，$\{c\}$

9. 假设 u 和 v 的强连通分支是相交的，如两者中都含结点 w。假设 x 是 u 的强连通分支中的结点，则 x 也在 v 的强连通分支中，因为存在一条从 x 到 v 的路径(即从 x 到 u 的路径跟着从 u 到 w 的路径，接着是从 w 到 v 的路径)，反之亦然。所以 x 在 v 的强连通分支中。这就证明了 u 的强连通分支是 v 的强连通分支的子图，由对称性可知等价性。

10. a)2　　b)7　　c)20　　d)61

11. 不是同构的(G 有一个三角形关系，而 H 没有)

12. 不是同构的(通路 $u_1, u_2, u_7, u_6, u_5, u_4, u_3, u_8, u_1$ 对应于通路 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_8, v_7, v_6, v_1$)。

13. a)3　　b)0　　c)27　　d)0

14. 由定义，R 是自反的。假设$(u, v)\in R$，则存在从 u 到 v 的通路。于是$(v, u)\in R$，因为存在从 v 到 u 的通路，即从 u 到 v 的通路的倒转，所以 R 是对称的。假设$(u, v)\in R$ 且$(v, w)\in R$，则存在从 u 到 v 和从 v 到 w 的通路。把这两条通路合在一起就给出从 u 到 w 的通路，因此$(u, w)\in R$，所以 R 是传递的。

15. c

16. b, c, e, i

17. 如果一个顶点是悬挂点，显然它不是割点。所以割边的端点是割点就不是悬挂点。删除一条割边，产生比原图有更多连通分支的图，如果割边的端点不是悬挂点，则在删除割边后，该端点所在的连通分支就不只含有这一个顶点。因此，删除该顶点及其关联的所有边，包括原来那条割边，就产生比原图有更多连通分支的图。因此，割边的端点不是悬挂点就是割点。

18. 假设连通图 G 至多有 1 个顶点不是割点。定义顶点 u 和 v 之间的距离(记作 $d(u, v)$)是 G 中 u 与 v 之间最短通路的长度。设 s 和 t 是 G 中使得 $d(s, t)$最大的顶点。s 或 t 之一(或二者都)是割点。所以不失一般性，假设 s 是割点。在从 G 删除 s 及其关联边所得到的图中，设 w 属于不含 t 的那个连通分支。由于从 w 到 t 的每条通路都含有 s，所以 $d(w, t)>d(s, t)$，这是矛盾。

19. a)丹佛—芝加哥，波士顿—纽约

    b)西雅图—波特兰，波特兰—旧金山，盐湖城—丹佛，纽约—波士顿，波士顿—伯灵顿，波士顿—班戈

20. 一组人合起来能(直接或间接)影响每个人；{Deborah}

21. 一条边不能连接不同连通分支内的两个顶点。由于在有 n_i 个顶点的连通分支内至多有$C(n_i, 2)$条边，所以图中至多有 $\sum_{i=1}^{k} C(n_i, 2)$条边。

22. 假设 G 不连通。则有一个连通分支有 k 个顶点，$1\leqslant k\leqslant n-1$。$G$ 的边数最多为 $C(k, 2)+C(n-k, 2)=(k(k-1)+(n-k)(n-k-1))/2=k^2-nk+(n^2-n)/2$。这个 k 的二次函数在 $k=n/2$ 处最小，在 $k=1$ 或 $k=n-1$ 处最大。因此，若 G 不连通，则边数不超过这个函数在 1 和 $n-1$ 处的值，即$(n-1)(n-2)/2$。

23. a)1　　b)2　　c)6　　d)21

24. a)从环中移除一条边，留下一条仍然连接的路径。

    b)每一轮从循环部分移除一条边，使图仍然连接，而且中心点也和该部分仍然连接。移除一个点使得环完整，并且中心点仍然与该环相连。

    c)任意 4 个点，二分后部分的两个被一个 4 环连接；移除一条边将使它们断开。

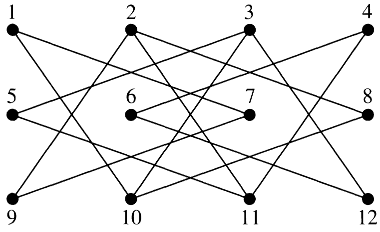
    d)删除连接$(b_1, b_2, \cdots, b_{i-1}, 0, b_{i+1}, \cdots, b_n)$和$(b_1, b_2, \cdots, b_{i-1}, 1, b_{i+1}, \cdots, b_n)$的边不会使图不连通，因为如果 $n<2$ 且 $b_n=0$ 这两个点仍然会通过路径$(b_1, b_2, \cdots, b_{i-1}, 0, b_{i+1}, \cdots, 0)$，

$(b_1, b_2, \cdots, b_{i-1}, 0, b_{i+1}, \cdots, 1)$，$(b_1, b_2, \cdots, b_{i-1}, 1, b_{i+1}, \cdots, 1)$，$(b_1, b_2, \cdots, b_{i-1}, 1, b_{i+1}, \cdots, 0)$相连，其他三种情况类似。

25. 如果 G 是完全图，则每步移除一个点，剩下的图仍然是完全图，因此绝不会出现非连通图。相反，如果边 uv 不在 G 图中了，那么移除所有除了 u 和 v 的点将会得到非连通图。
26. 都等于 $\min(m, n)$
27. 令 G 是一个有 n 个点的图，则 $\kappa(G)\leqslant n-1$。令 C 是使 G 的非空真子集 S 与互补集 $S'=V-S$ 不连通的最小割边。如果 xy 是 G 中的边，其中 $x\in S$，$y\in S'$，那么 C 的大小至少为 $|S|\ |S'|$，即至少为 $n-1$，所以 $\kappa(G)\leqslant\lambda(G)$。否则令 $x\in S$，$y\in S'$是不相邻的点。使 T 包含 S'中的 x 的所有邻接点和所有 $S-\{x\}$中的以 S'中的点为邻接点的点。那么 T 就是一个割点，因为它分开了 x 和 y。现在来看看从 x 指向 $T\cap S'$的边和从任意一个 $T\cap S$ 中的点指向 S'的一条边。这就给出了 C 中 $|T|$ 条不同的边，因此$\lambda(G)=|C|\geqslant|T|\geqslant\kappa(G)$。
28. 2
29. 设通路 P_1 和 P_2 分别是 $u=x_0, x_1, \cdots, x_n=v$ 和 $u=y_0, y_1, \cdots, y_m=v$。由于 P_1 和 P_2 不含公共边，所以迟早会分开。如果在其中一条通路结束后才分开，则另一条通路的剩余部分就是从 v 到 u 的回路。否则，假设 $x_0=y_0$，$x_1=y_1$，$\cdots$，$x_i=y_i$，但是 $x_{i+1}\neq y_{i+1}$。沿着通路 $y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \cdots$ 前进，直到再次遇到 P_1 上的顶点为止。一旦回到 P_1，就沿着 P_1 向前或向后(视需要而定)，直到回到 x_i。由于 $x_i=y_i$，这样形成的回路必定是简单的，因为各 x_k 之间的边没有重复，而且这些边也不同于所用到的各 y_i 之间的边。
30. 图是连通的当且仅当 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^3+\cdots+\boldsymbol{A}^{n-1}$的对角线外元素都是正的，其中 $\boldsymbol{A}$ 是 G 的邻接矩阵。
31. 如果图是偶图，不妨设顶点分成 A 和 B 两部分，则每条通路上的顶点必定交替属于 A 和 B。因此，从 A 出发的通路在奇数步后停在 B，在偶数步后停在 A。由于回路总是停在出发的同一个顶点上，所以长度必为偶数。反之，假设所有回路长度都是偶数，要证明图是偶图。可以假设图是连通的，因为若不连通，则每次仅考虑一个连通分支即可。设 v 是图的一个顶点，设 A 是从 v 出发的长度为奇数的通路的所有顶点的集合，设 B 是从 v 出发的长度为偶数的通路的所有顶点的集合。由于这个分支是连通的，所以每个顶点都属于 A 或 B。没有顶点同时属于 A 和 B，因为那样一来，从 v 到那个顶点的奇长度通路，加上从那个顶点到 v 的偶长度通路，就产生一个奇回路，与假设矛盾。因此，顶点集合划分成两部分。为了证明每条边的端点都在不同部分中，假设 xy 是一条边，其中 $x\in A$。则从 v 到 x 的长度为奇数的通路加上 xy，就产生了从 v 到 y 的长度为偶数的通路，所以 $y\in B$。(若 $x\in B$，也类似可证。)
32. $(H_1W_1H_2W_2\langle\text{boat}\rangle, \varnothing)\rightarrow(H_2W_2, H_1W_1\langle\text{boat}\rangle)\rightarrow(H_1H_2W_2\langle\text{boat}\rangle, W_1)\rightarrow(W_2, H_1W_1H_2\langle\text{boat}\rangle)\rightarrow(H_2W_2\langle\text{boat}\rangle, H_1W_1)\rightarrow(\varnothing, H_1W_1H_2W_2\langle\text{boat}\rangle)$

6.5 节

1. 均无
2. 无欧拉回路；$a, e, c, e, b, e, d, b, a, c, d$
3. $a, b, c, d, c, e, d, b, e, a, e, a$
4. $a, i, h, g, d, e, f, g, c, e, h, d, c, a, b, i, c, b, h, a$
5. 不能，A 仍然是奇数度的。
6. 当顶点表示交叉路口，边表示街道的图有欧拉通路时。
7. 能
8. 不能
9. 如果有欧拉通路，则沿着该通路前进时，除起点和终点外，每个顶点都有相同的入度和出度，因为当沿一条边进入一个顶点时，还要沿另一条边离开它。起点必定是出度比入度大 1，因为用一条边离开这个顶点，而当再次访问它时，要用一条边进入和一条边离开。同理，终点必定是入度比出度大 1。由于不考虑方向的欧拉通路在无向图中产生任意两个顶点之间的通路，所以该图是弱连通的。反之，假设图满足题设条件。如果从出度小的顶点到入度小的顶点之间增加一条边，则该图每个顶点入度与出度相等。由于该图仍然是弱连通的，所以这个新图有欧拉回路。现在删除后加的边，就得到欧拉通路。

10. 均无
11. 无欧拉回路；a，d，e，d，b，a，e，c，e，b，c，b，e
12. 均无
13. 与算法 1 的过程基本相同，要考虑遵循边的方向。
14. a)$n=2$　　b)无　　c)无　　d)$n=1$
15. 练习 1：1 次；练习 2～4：0 次
16. a，b，c，d，e，a 是哈密顿回路。
17. 不存在哈密顿回路，因为一旦这样的回路到达 e，就无路可走了。
18. 不存在哈密顿回路，因为图中每条边都与 2 度点关联，因此必须在该回路上。
19. $m=n\geqslant 2$
20. a)(i)否，(ii)否，(iii)是b)(i)否，(ii)否，(iii)是 c)(i)是，(ii)是，(iii)是 d)(i)是，(ii)是，(iii)是
21. 对于 $n=1$，结果是平凡的，编码是 0，1。假设存在 n 阶格雷码，设 c_1，c_2，…，c_k 是这样的编码，$k=2^n$。则 $0c_1$，$0c_2$，…，$0c_k$，$1c_1$，$1c_2$，…，$1c_k$ 是 $n+1$ 阶格雷码。
22. **procedure** Fleury($G=(V,E)$：连通多重图，所有顶点度为偶数，$V=\{v_1,\cdots,v_n\}$)
   $v:=v_1$
   circuit $:=v$
   $H:=G$
   while H 有边
   　$e:=$若存在，H 中以 v 为端点的第一条边(按照 V 的排序)，且 e 不是 H 中的割边，否则就是 H 中以 v 为端点的第一条边
   　$w:=e$ 的另一个端点
   　circuit $:=$circuit 加入边 e 和顶点 w
   　$v:=w$
   　$H:=H-e$
   return circuit{circuit 是欧拉回路}
23. 若 G 有欧拉回路，则该回路也是欧拉通路。若无欧拉回路，则在两个奇数度顶点之间加一条边，应用算法求出欧拉回路。然后删除新加的边。
24. 假设 $G=(V,E)$是满足 $V=V_1\cup V_2$ 的偶图，其中没有边连接 V_1 里的顶点与 V_2 里的顶点。假设 G 有哈密顿回路。这样的回路必然是形如 a_1，b_1，a_2，b_2，…，a_k，b_k，a_1，b_1，其中对 $i=1,2,\cdots,k$ 来说，有 $a_i\in V_1$ 和 $b_i\in V_2$。因为哈密顿回路访问每个顶点恰好一次，所以除了回路开始和结束的 a_1 之外，图中的顶点数等于 $2k$，它是偶数。因此，带奇数个顶点的偶图不可能有哈密顿回路。
25. 

26. 把 3×4 棋盘的格子表示如下。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

马的巡回路线可以通过下列移动来构成：8，10，1，7，9，2，11，5，3，12，6，4。

27. 把 4×4 棋盘的格子表示如下。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

从角上的四个格子里只有两种移动。若包含1—10、1—7、16—10和16—7的所有边，则过早地完成了回路，所以必须去掉这些边中的至少一条。不失一般性，假设通路开始于1—10、10—16和16—7。现在从格子3仅有的移动是到格子5、10和12，而格子10已经有了两条关联的边。因此3—5和3—12必须在哈密顿回路里。同理，边8—2和8—15必须在回路里。现在从格子9仅有的移动是到格子2、7和15。假如有从格子9到格子2和15的边，则过早地完成了回路。因此边9—7必须在回路里，让格子7关联的边达到饱和。但是现在格子14被迫连接到格子5和12，过早地完成了回路(5—14—12—3—5)。这个矛盾证明在4×4棋盘上没有马的巡回路线。

28. 因为在$m\times n$棋盘上有mn个格子，所以若m和n都是奇数，则有奇数个格子。因为根据练习62，对应的图是二分图，根据练习55，它没有哈密顿回路。因此没有可折返的马的巡回路线。

29. a)如果G没有哈密顿回路，则不断地尽量把G没有的边逐条加入G，条件是产生的图不含哈密顿回路。不可能一直这样做下去，因为一旦把G没有的所有边都加入了，就形成了完全图，就有了哈密顿回路。到这个过程停止时，就得到了具有所需要性质的图H(肯定是非完全的)。

b)再给H加入一条边。这样就产生了经过所加入的边的哈密顿回路。从这个回路上去掉加入的边所形成的通路，就是H中的哈密顿通路。

c)显然v_1与v_n在H中不相邻，因为H没有哈密顿回路。因此v_1与v_n在G中不相邻。但是假设了在G中不相邻顶点的度之和至少为n。这个不等式可以改写成$n-\deg(v_n)\leqslant\deg(v_1)$。但$n-\deg(v_n)$正是不与$v_n$相邻的顶点数。

d)由于在哈密顿通路上v_n没有后续顶点，所以v_n不属于S。与v_1相邻的$\deg(v_1)$个顶点中的每个顶点都引出一个S中的元素，所以S包含$\deg(v_1)$个顶点。

e)根据c)，至多有$\deg(v_1)-1$个与v_n不同且不与v_n相邻的顶点，根据d)，S中有$\deg(v_1)$个顶点，这些顶点都不是v_n。因此至少有一个S中的顶点与v_n相邻。根据定义，如果v_k是这个顶点，则H包含边v_kv_n和v_1v_{k+1}，其中$1<k<n-1$。

f)现在v_1，v_2，…，v_{k-1}，v_k，v_n，v_{n-1}，…，v_{k+1}，v_1是H中的哈密顿回路，与H的构造矛盾。因此G原来没有哈密顿回路的假设是错误的，反证法完成了。

6.6节

1. a)顶点是车站，边连接相邻车站，权是相邻车站之间旅行所需要的时间。
   b)与a)基本相同，不同之处在于，权是相邻车站之间的距离。
   c)与a)基本相同，不同之处在于，权是车站之间的票价。
2. 16
3. 练习2：a，c，d，e，g，z；
4. a)经芝加哥　b)经芝加哥　c)经洛杉矶　d)经芝加哥
5. a)经芝加哥　b)经芝加哥　c)经洛杉矶　d)经芝加哥。
6. 当把z加入集合S时，算法不停止。
7. a)经木桥，经木桥和康登　b)经木桥，经木桥和康登
8. 例如，观光路线，清扫街道
9.

	a	b	c	d	e	z
a	4	3	2	8	10	13
b	3	2	1	5	7	10
c	2	1	2	6	8	11

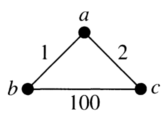
(续)

	a	b	c	d	e	z
d	8	5	6	4	2	5
e	10	7	8	2	4	3
z	13	10	11	5	3	6

10. $O(n^3)$

11. $a-c-b-d-a$(或者从某个点开始，以相同或相反顺序遍历这些顶点的相同回路)

12. 旧金山-丹佛-底特律-纽约-洛杉矶-旧金山(或者从某个点开始，以相同或相反顺序遍历这些顶点的相同回路)

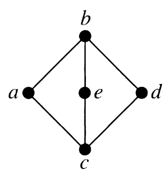
13. 考虑这个图：

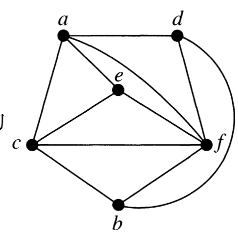
回路 $a-b-a-c-a$ 访问每个顶点至少一次(访问顶点 a 两次)，总权值为 6。每个哈密顿回路有总权值为 103。

14. 令 v_1，v_2，…，v_n 是一个给定的有向非循环图的点的拓扑排序。令 $w(i, j)$为边 v_iv_j 的权值。迭代定义 $P(i)$为终点为 v_i 的最长路径的权值，$C(i)$为最长路径中 v_i 之前的点，对于从 1 到 n 的 i，令 $P(i)$为所有 $j<i$ 中 $P(j)+w(j, i)$的最大值，v_jv_i 是有向图中的一条边(并且如果 j 存在，令 $C(i)$为获得最大值的 j 的值)，并且令$P(i)=0$ 如果这样的 j 不存在。这个循环结束时，通过选择 i 使得$P(i)$取得最大值，一条最长的路径就找到了，而且 C 反过来连接到路径的起点。

6.7 节

1. 是

2. 

3. 非可平面的
4. 可平面的 

5. 非可平面的

6. 由连接 v_1、v_2、v_3 的边组成的 K_5 子图，其平面表示形成一个三角形。顶点 v_4 要么在三角形内，要么在三角形外。下面只考虑 v_4 在三角形内的情形，另一种情形是类似的。画出从 v_1、v_2、v_3 到 v_4 的边，一共形成 4 个区域。无论 v_5 在哪个区域中，都只能让 v_5 与其余顶点中的 3 个顶点相连，而不能与所有 4 个顶点相连。

7. 8

8. 由于没有环和多重边，也没有长度为 3 的回路，而且无界区域的次数至少为 4，所以每个区域的次数至少为 4。因此，$2e\geqslant 4r$，或 $r\leqslant e/2$。但是 $r=e-v+2$，所以有 $e-v+2\leqslant e/2$，这蕴含着 $e\leqslant 2v-4$。

9. 与推论 2 中一样，有 $2e\geqslant 5r$ 和 $r=e-v+2$，因此 $e-v+2\leqslant 2e/5$，这蕴含着 $e\leqslant(5/3)v-(10/3)$。

10. 只有 a)和 c)

11. 不同胚于 $K_{3,3}$

12. 可平面的

13. 非可平面的

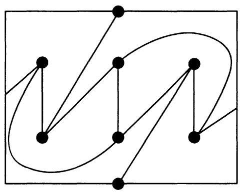
14. a)1　　b)3　　c)9　　d)2　　e)4　　f)16

15. 按照提示来画 $K_{m,n}$。交叉数是第一象限中数目的 4 倍。在 x 轴上原点右边的顶点是$(1, 0)$，$(2, 0)$，…，$(m/2, 0)$，在 y 轴上原点上边的顶点是$(0, 1)$，$(0, 2)$，…，$(0, n/2)$。选择任意两个不同的数 a 和 b，$1\leqslant a<b\leqslant m/2$，以及两个不同的数 r 和 s，$1\leqslant r<s\leqslant n/2$，就得出所有的交叉。在图中连接$(a, 0)$和$(0, s)$的边与连接$(b, 0)$和$(0, r)$的边之间，恰好产生一处交叉。因此，在第一象限中

的交叉数是$C\left(\frac{m}{2}, 2\right)\cdot C\left(\frac{n}{2}, 2\right)=\frac{(m/2)(m/2-1)}{2}\cdot\frac{(n/2)(n/2-1)}{2}$。因此，总交叉数是$4\cdot mn(m-2)(n-2)/64=mn(m-2)(n-2)/16$。

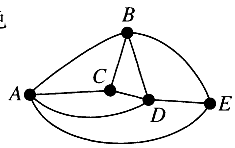
16. a)2　b)2　c)2　d)2　e)2　f)2

17.

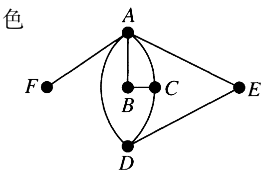


6.8 节

1. 4 色



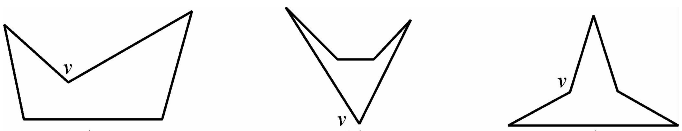
2. 3 色



3. 3
4. 3
5. 2
6. 3
7. 没有边的图　8. 3(若 n 为偶数)，4(若 n 为奇数)
9. 时间段 1：Math 115，Math 185；时间段 2：Math 116，CS 473；时间段 3：Math195，CS 101；时间段 4：CS 102；时间段 5：CS 273
10. 5
11. 练习 3∶3，练习 4∶3，练习 5∶3，练习 6∶4
12. a)如果 n 为偶数，则为 2，如果 n 为奇数则为 3。
    b)n
13. 颜色相同的两条边不会有相同的顶点。因此如果超过 $n/2$ 被着相同的颜色，则图将会有超过 $2(n/2)=n$ 个点。
14. 5
15. 颜色 1∶e，f，d；颜色 2∶c，a，i，g；颜色 3∶h，b，i
16. 给 C_6 着色
17. 当 n 是大于 1 的奇数时，需要 4 种颜色为 W_n 着色，因为对于圈图，需要 3 种颜色着色(见例 4)，并且还有一个与所有圈图顶点相邻的中心顶点，这样就要求 4 种颜色。为了看到如何通过删去用 3 种颜色着色的边来从 W_n 获得这个图，考虑两种情况。如果我们移除圈图的一条边，那么我们可以用两种颜色来给圈图着色，并且剩下的圈图部分可以交替使用这两种颜色。第三种颜色用来给中心点着色。如果我们移除一条轮辐(spoke)边，那么我们可以用♯1 颜色给圈图移除边的终点着色，交替使用♯2 和♯3 颜色给圈图其余顶点着色，然后用♯1 颜色给中心顶点着色。
18. 假设 G 是着色 k 关键的，但有一个度为 $k-2$ 或小于 $k-2$ 的顶点 v。从 G 中删去一条与 v 相连的边。由 k 关键的定义知，得到的图可以用 $k-1$ 种颜色着色。现在恢复这条缺少的边，并对所有除 v 外的顶点使用这种着色。因为我们已经有针对这个更小图的适当着色，所以没有两个邻接的顶点有相同的颜色。而且，v 至多有 $k-2$ 个邻居，所以我们可以用一个没有用过的颜色着色 v，以便得到 G 的一个合适的$(k-1)$着色。这与 G 的着色数是 k 矛盾。因此，我们的假设不成立，G 的每个顶点的度必须至少为 $k-1$。
19. a)6　b)7　c)9　d)11
20. 用颜色表示频率，用顶点表示地段。如果两个顶点表示的地段互相干涉，则用边连接这两个顶点。于是 k 重着色恰好就是避免了干涉的频率分配。
21. 对图的顶点数进行归纳。具有 5 个或少于 5 个顶点的图可用 5 色或少于 5 色来着色，因为每个顶点可

用不同的颜色。这就完成了基础情形。假设所有 k 个顶点的图都可用 5 着色，考虑 $k+1$ 个顶点的图 G。根据 6.7 节推论 2，G 至少有一个度不超过 5 的顶点 v。删除 v 得到图 G'。由于 G' 只有 k 个顶点，由归纳假设可对 G' 做 5 着色。如果与 v 相邻的顶点没有用完 5 种颜色，则把 v 的邻点没有用的颜色给 v，就给 G 做了 5 着色。麻烦出现在若 v 有 5 个邻点，并且每个点用了 G' 的 5 着色中的一种不同颜色。假设以逆时针顺序考虑 v 的邻点是 a，b，c，m，p。(表示与 v 关联的边的曲线的逆时针顺序决定了这个顶点顺序。)假设这些邻点的颜色分别是：天蓝(azure)、蓝(blue)、黄绿(chartreuse)、洋红(magenta)、紫(purple)。考虑天蓝-黄绿子图(即 G 中着天蓝或黄绿色的顶点以及这些顶点之间的边)。如果 a 和 c 在这个子图的不同连同分支中，则在含有 a 的分支中可以交换这两种颜色(让天蓝色顶点改成黄绿色，让黄绿色顶点改成天蓝色)，而 G' 仍然是恰当着色的。这样就让 a 成为黄绿色，于是现在可给 v 着天蓝色，G 就恰当着色了。如果 a 和 c 在同一个连通分支中，则有一条路径连接 a 和 c，其上的顶点交替着天蓝和黄绿色。这条路径连同边 av 和 vc 就把平面划分成两个区域，其中一个区域含有 b，另外一个区域含有 m。如果现在给 b 所在区域中的所有顶点交换蓝色和洋红色，则仍然得到 G' 的恰当着色，但是现在蓝色可给 v 着色了。在这种情况下，也找到了 G 的恰当着色。这样就完成了归纳步骤，于是定理得证。

22. 我们按照提示来解答。因为五角形的内角和为 540°，所以不存在 3 个超过 180°的内角(优角)，如果五角形中没有优角，那么五角形是凸的，并且位于任意顶点的守卫可以看到所有的点。如果五角形中有一个优角，那么五角形必然看起来像下面的图 a，并且顶点 v 处的守卫可以看到所有的点。如果五角形中有两个优角，那么它们可能相邻，也可能不相邻(如图 b 和 c 所示)，在两种情形的任一情形下，顶点 v 处的守卫可以看到所有的点。[在图 c 中，选择优角更接近于底边。]因此，对于所有五角形，一个守卫就足够了，所以 $g(5)=1$。



a)　　b)　　c)

23. 这幅图暗示提示中(对任意 $k\geqslant 1$，有 k 齿尖)有 $3k$ 个顶点。不同齿尖可见的位置集合是不相交的。因此，k 个齿尖中每个都需要一个单独的守卫，这样至少需要 k 个守卫。这表明 $g(3k)\geqslant k=\lfloor 3k/3\rfloor$。如果 $n=3k+i$，其中 $0\leqslant i\leqslant 2$，那么 $g(n)\geqslant g(3k)\geqslant k=\lfloor n/3\rfloor$。

补充练习

1. 2500　　3. 同构　　5. 同构

7. $\sum_{i=1}^{m} n_i$ 个顶点，$\sum_{i<j} n_i n_j$ 条边

9. a)如果 $x\in N(A\cup B)$，那么 x 邻接于 v，其中 $v\in A\cup B$。WOLOG 假设 $v\in A$，那么 $x\in N(A)$ 且 $x\in N(A)\cup N(B)$。相反，如果 $x\in N(A)\cup N(B)$，那么 WOLOG 假设 $x\in N(A)$。因此 x 邻接于 v，其中 $v\in A\subseteq A\cup B$，因此 $x\in N(A\cup B)$。

   b)如果 $x\in N(A\cap B)$，那么 x 邻接于 v，其中 $v\in A\cap B$。由于 $v\in A$ 且 $v\in B$，从而 $x\in N(A)$ 且 $x\in N(B)$，由此 $x\in N(A)\cap N(B)$。举一个反例，$G=(\{u,v,w\},\{\{u,v\},\{v,w\}\})$，$A=\{u\}$，和 $B=\{w\}$。

11. (c, a, p, x, n, m)和许多其他的

13. (c, d, a, b)和许多其他的

15. 三角形的个数除以长度为 2 的路径个数的 6 倍。

17. a)和一个随机选取的演员合作演过一部电影的两个演员合作演同一部电影的概率。

    b)随机选择的两人的 Facebook 上的朋友是他们自己 Facebook 朋友的概率。

    c)随机选择的两人的合作者是他们自己的合作者的概率。

    d)两种蛋白质中每一个与随机选择的蛋白质相互作用的概率。

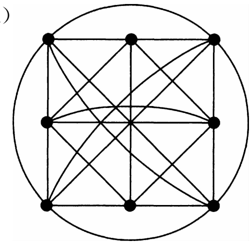
    e)两个路由器，每一个都和随机选取的一个路由器有通信链路相连，它们自己也相互链接的概率。

19. 完全子图，它含有下列顶点集合：$\{b, c, e, f\}$，$\{a, b, g\}$，$\{a, d, g\}$，$\{d, e, g\}$，$\{b, e, g\}$

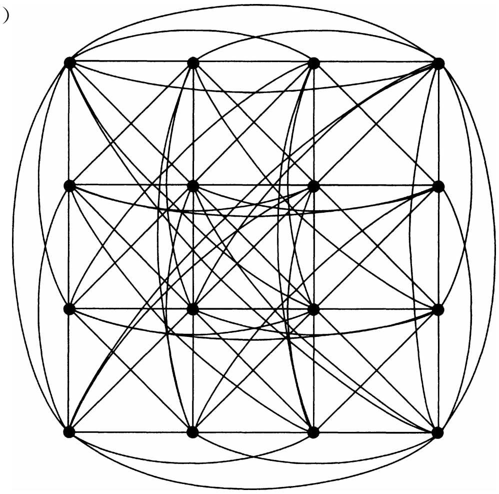
21. 完全子图，它含有下列顶点集合：$\{b, c, d, j, k\}$，$\{a, b, j, k\}$，$\{e, f, g, i\}$，$\{a, b, i\}$，$\{a, i, j\}$，$\{b, d, e\}$，$\{b, e, i\}$，$\{b, i, j\}$，$\{g, h, i\}$，$\{h, i, j\}$

23. $\{c, d\}$是最小支配集

25. a)



b)



27. a)1　　b)2　　c)3

29. a)图 G 中从 u 到 v 的路径导出同构图 H 中从 $f(u)$到 $f(v)$的路径。

  b)假设 f 是从 G 到 H 的同构映射。若 v_0，v_1，…，v_n，v_0 是 G 中的哈密顿回路，则 $f(v_0)$，$f(v_1)$，…，$f(v_n)$，$f(v_0)$必为 H 中的哈密顿回路，因为它还是回路并且对于 $0\leqslant i<j\leqslant n$，$f(v_i)\neq f(v_j)$。

  c)假设 f 是从 G 到 H 的同构映射。若 v_0，v_1，…，v_n，v_0 是 G 中的欧拉回路，则 $f(v_0)$，$f(v_1)$，…,$f(v_n)$，$f(v_0)$必为 H 中的欧拉回路，因为它还是过每条边恰好一次的回路。

  d)两个同构图必有相同的交叉数，因为它们可用完全相同的方式画在平面上。

  e)假设 f 是从 G 到 H 的同构映射，则 v 在 G 中是孤立点当且仅当 $f(v)$在 H 中是孤立点。因此这两个图必有相同的孤立点数。

  f)假设 f 是从 G 到 H 的同构映射。若 G 是二分图，则 G 的顶点集可划分成 V_1 和 V_2，使得没有边连接 V_1 中的顶点和 V_2 中的顶点。于是 H 的顶点集可划分成 $f(V_1)$和 $f(V_2)$，使得没有边连接$f(V_1)$中的顶点和 $f(V_2)$中的顶点。

31. 3

33. a)是　　b)不是

35. 不是

37. 是

39. 如果 e 是端点为 u 和 v 的割边，那么若 e 的方向是从 u 到 v，则在该有向图中没有从 v 到 u 的路径，否则 e 就不是割边。若 e 的方向是从 v 到 u，则可做类似的推理。

41. $n-1$

43. 让顶点表示鸡，图中有边(u, v)当且仅当鸡 u 比鸡 v 占优势。

45. 通过握手理论，点的平均度为 $2m/n$，等于最小度。由此可见所有点的度相等。

47. $K_{3,3}$和三角棱镜的框架图

49. a)图中的哈密顿回路正好对应于圆桌旁表示相邻骑士是朋友的骑士

  b)图中每一个点的度至少为 $2n-1-(n-1)=n\geqslant(2n/2)$，因此通过 Dirac 理论，这个图是哈密顿回路。

  c)a, b, d, f, g, z

51. a)4　　b)2　　c)3　　d)4　　e)4　　f)2

53. a)假设 $G=(V, E)$，设 $a, b\in V$。要证明 a 和 b 在 $\overline{G}$ 中的距离至多为 2。若$\{a, b\}\notin E$，则此距离为 1，所以假设$\{a, b\}\in E$。由于 G 的直径大于 3，所以存在顶点 u 和 v，使得 u 和 v 在 G 中的距离大

于 3。u 或 v 二者之一或全部都不属于集合$\{a, b\}$。假设 u 与 a、b 不同，则$\{a, u\}$或$\{b, u\}$之一属于 E；否则 a、u、b 就是$\overline{G}$ 中长度为 2 的路径。所以，不失一般性，假设$\{a, u\}\in E$。因此 v 不是 a 或不是 b，根据同样的推理，要么$\{a, v\}\in E$，要么$\{b, v\}\in E$。无论哪种情形，都给出 G 中从 u 到 v 长度小于等于 3 的路径，这是矛盾。

b)假设 $G=(V, E)$，设 $a, b\in V$。要证明 a 和 b 在$\overline{G}$ 中距离不超过 3。若$\{a, b\}\notin E$，则得出所要的结果，所以假设$\{a, b\}\in E$。由于 G 的直径大于等于 3，所以存在顶点 u 和 v，使得 u 和 v 在 G 中的距离大于等于 3。u 或 v 二者之一或全部都不属于集合$\{a, b\}$。假设 u 与 a、b 不同。要么$\{a, u\}\in E$，要么$\{b, u\}\in E$；否则 a、u、b 就是$\overline{G}$ 中长度为 2 的路径。所以，不失一般性，假设$\{a, u\}\in E$。因此 v 与 a 和 b 都不同。若$\{a, v\}\in E$，则 u、a、v 是 G 中长度为 2 的路径，所以$\{a, v\}\notin E$，因此$\{b, v\}\in E$(否则$\overline{G}$ 中有长度为 2 的路径 a, v, b)。因此$\{u, b\}\notin E$；否则 u、b、v 是 G 中长度为 2 的路径。因此，a, v, u, b 是$\overline{G}$ 中长度为 3 的路径，即为所求。

55. a, b, e, z

57. a, c, b, d, e, z

59. 若 G 是可平面的，则由于 $e\leqslant 3v-6$，所以 G 至多有 27 条边。(若 G 不连通，G 的边还要少。)同理，$\overline{G}$ 至多有 27 条边。但是 G 和$\overline{G}$ 的并图是 K_{11}，K_{11}有 55 条边，而 $55>27+27$。

61. 假设 G 用 k 色着色并且独立数为 i。由于每个颜色类都是独立集，所以每个颜色类有不超过 i 个元素。因此至多有 k_i 个顶点。

63. a)$C(n, m)p^m(1-p)^{n-m}$。

b)np。

c)为了生成一个带标记图 G，当把这个过程应用到顶点对上时，当 G 在那对顶点之间有边时，所选择的随机数 x 必定小于等于 1/2；当 G 在那对顶点之间无边时，x 大于 1/2。因此，做正确选择的概率对每条边来说是 1/2，对所有边来说是 $1/2^{C(n,2)}$。因此所有带标记的图是等概率的。

65. 假设 P 是单调增的。如果从简单图中删除边，不保持不具有性质 P 这个性质，就有一个简单图 G 不具有性质 P，有另外一个简单图 G'具有性质 P，G'与 G 有相同顶点但是比 G 少一些边。但是性质 P 是单调增的，由于 G'具有性质 P，所以给 G'添加边得到的 G 也具有性质 P。这是矛盾。逆命题的证明是类似的。

第 7 章

7.1 节

1. (a)，(c)，(e)

2. a)a　b)$a, b, c, d, f, h, j, q, t$　c)$e, g, i, k, l, m, n, o, p, r, s, u$
d)q, r　e)c　f)p　g)f, b, a　h)e, f, l, m, n

3. 否

4. 0 层：a；1 层：b, c, d；2 层：$e\sim k$(按字母顺序)；3 层：$l\sim r$；4 层：s, t；5 层：u

5. a)整棵树　b)c, g, h, o, p 和 4 条边 cg, ch, ho, hp　c)只有 e

6. a)1　b)2　7. a)3　b)9

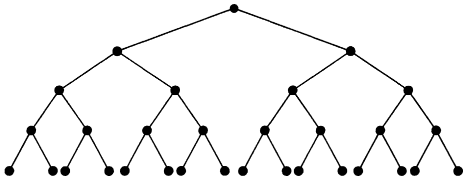
8. a)"仅当"部分就是定理 2 和树的定义。假设 G 是连通简单图，那么有 n 个顶点和 $n-1$ 条边。如果 G 不是树，G 包含这样一条边，删除这条边产生一个图 G'，G'仍连通。如果 G'不是树，删除一条边产生连通图 G''。重复这个过程直到得出树为止。这至多需要 $n-1$ 步，因为只有 $n-1$ 条边。由定理 2，得出的图有 $n-1$ 条边，因为它有 n 个顶点。由于并没有删除边，所以 G 本身就是树。

b)假设 G 是树，根据 a)的结论，G 有 $n-1$ 条边，根据定义，G 没有简单回路。反过来，假设 G 没有简单回路并且有 $n-1$ 条边。令 c 等于 G 的分量的数目，每一个分量是一个有 n_i 个顶点的分量，且 $\sum_{i=1}^{c} n_i = n$，根据 a)的结论，G 中边的总数是 $\sum_{i=1}^{c}(n_i-1)=n-c$。因为已知总数应为 $n-1$，因此 $c=1$，G 是连通的并且满足树的定义。

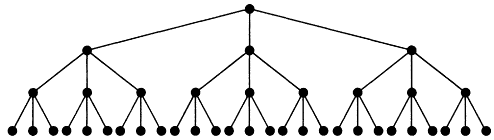
9. 9999　10. 2000　11. 999　12. 1 000 000 美元

13. 由定理 4 可知，不存在这样的树，因为 $m=2$ 或 $m=84$ 是不可能的。

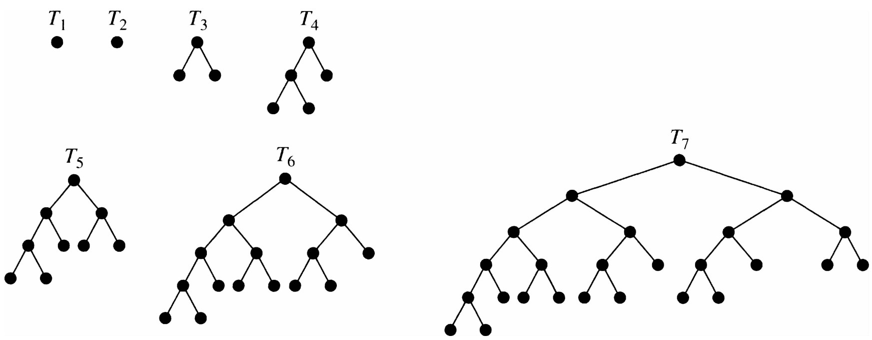
14. 高度为 4 的完全二叉树



高度为 3 的完全 3 元树



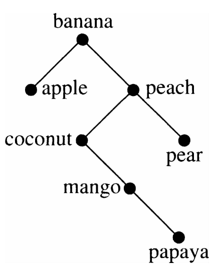
15. a)根据定理 3，有 $n=mi+1$。因为 $i+l=n$，即 $l=n-i$，所以 $l=(mi+1)-i=(m-1)i+1$。
    b)我们有 $n=mi+1$ 和 $i+l=n$，因此 $i=n-l$，$n=m(n-l)+1$。对 n 求解就给出 $n=(ml-1)/(m-1)$。从 $i=n-l$，得出 $i=[(ml-1)/(m-1)]-l=(l-1)/(m-1)$。
16. $n-t$
17. a)1　　b)3　　c)5
18. 设 $n=2^k$，其中 k 是正整数。若 $k=1$，则没有什么要证明的，因为可以用 $n-1=1$ 个处理器在 $\log 2=1$ 步里把两个数相加。假定可以在 $\log n$ 步里用 $n-1$ 个处理器的树形连接网络对 $n=2^k$ 个数求和。设 x_1，x_2，…，x_{2n}是希望求和的 $2n=2^{k+1}$个数。$2n-1$ 个处理器的树形连接网络包括 $n-1$ 个处理器的树形连接网络，以及对每个树叶作为儿子的两个新处理器。在一步内，可以用这个较大的网络的树叶来求出 x_1+x_2，x_3+x_4，…，$x_{2n-1}+x_{2n}$，结果得出 n 个数，根据归纳假设，可以用网络的其余部分在 $\log n$ 步内求它们的和。因为使用了 $\log n+1$ 步而且 $\log(2n)=\log 2+\log n=1+\log n$，所以这样就完成了证明。
19. 只有 c
20. c 和 h
21. 假设树 T 有至少两个中心。设 u 和 v 是不同的中心，都有离心度 e，u 和 e 不相邻。因为 T 是连通的，所以有从 u 到 v 的简单通路 P。设 c 是这个通路上的任意顶点。因为 c 的离心度至少为 e，所以存在顶点 w 使得从 c 到 w 的唯一简单通路长度至少为 e。显然这条通路不能同时包含 u 和 v，否则将有一条简单回路。事实上，一旦这条从 c 到 w 的通路可能沿着 P 的一部分向 u 或 v 前进，它就离开 P 并且不返回 P。不失一般性，假定这条通路不沿着 P 向 u 前进。于是从 u 到 c 到 w 的通路是简单的，而且长度不超过 e，矛盾。因此 u 和 v 是相邻的。现在因为任何两个中心都是相邻的，所以假如有多于两个的中心，那么 T 就包含简单回路 $K3$ 作为子图，这是矛盾的。
22.



23. 命题称有 n 个顶点的"每棵"树都有长度为 $n-1$ 的路径。而证明只显示出存在某个 n 个顶点的树有长度为 $n-1$ 的路径。

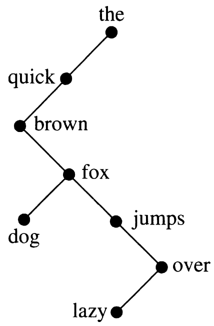
7.2 节

1.



2. a)3　　b)1　　c)4　　d)5

3.

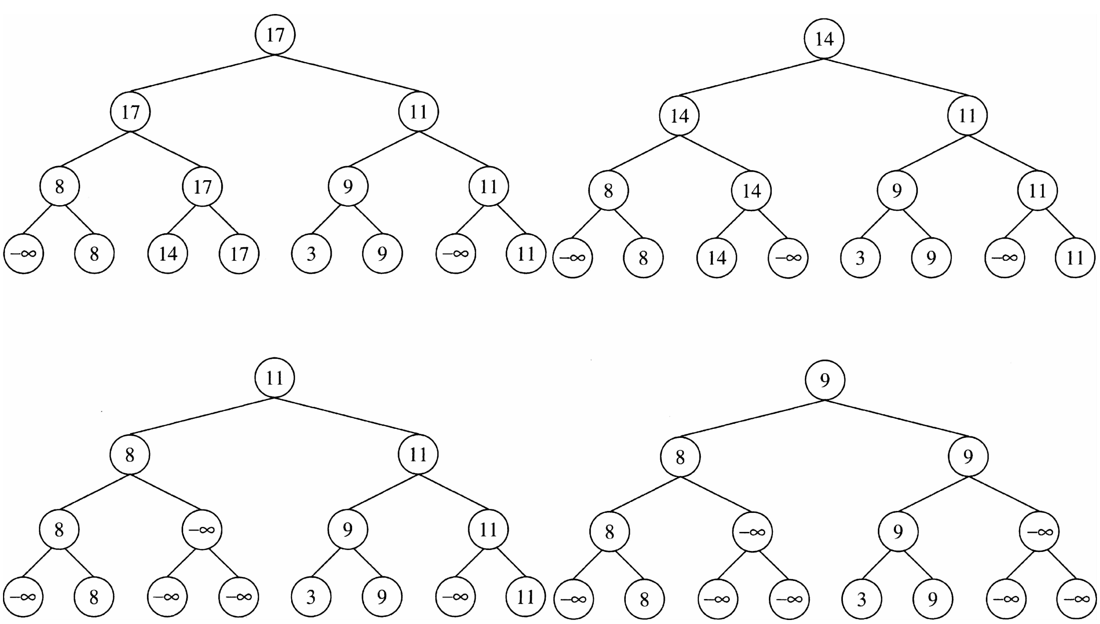


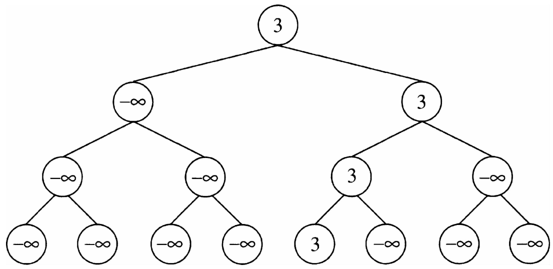
4. 至少需要$\lceil \log_3 4 \rceil = 2$次称重，因为只有4种结果(因为不要求确定硬币是较轻还是较重)。事实上，两次称重是足够的。首先称重硬币1和硬币2。若它们平衡，则称重硬币1和硬币3。若硬币1与硬币3重量相同，则硬币4是伪币，若它们重量不相同，则硬币3是伪币。若硬币1与硬币2重量不相同，则再称重硬币1和硬币3。若它们平衡，则硬币2是伪币；若它们不平衡，则硬币1是伪币。

5. 至少需要$\lceil \log_3 13 \rceil = 3$次称重。事实上，3次称重是足够的。首先把硬币1、2和3放在天平的左边，而把硬币4、5和6放在天平的右边。若相等，则应用例2到硬币1、2、7、8、9、10、11和12上。若不相等，则应用例2到硬币1、2、3、4、5、6、7和8上。

6. 最少比较5次。称这些元素为a、b、c、d。先比较a和b，再比较c和d。不失一般性，假设$a<b$和$c<d$。再比较a和c，其中较小的那个就是最小元素。仍不失一般性，假设$a<c$。最后让b与c和d比较，就完全确定它们的顺序。

7. 前两步如正文所述。在确定了22是第二大元素之后，在树中用$-\infty$代替树叶22，并沿着22上升到树根所经过的路径从树叶开始重新计算胜者。于是看到17是第三大元素，所以重复上述过程，在树中用$-\infty$代替树叶17并重新计算。于是看到14是第四大元素，所以重复上述过程，在树中用$-\infty$代替树叶14并重新计算。于是看到11是第五大元素，所以重复上述过程，在树中用$-\infty$代替树叶11并重新计算。就这样继续这个过程。确定9是第六大元素，8是第七大元素，3是第八大元素。除了倒数第2步以外，所有其余步骤所产生的树如下图所示。





8. 顶点的值是目前在那里的表元素，顶点的标记是导致那个值的树叶的名称(即位置)。

procedure tournament sort(a_1，…，a_n)
k :=⌈$\log n$⌉
建立高度为 k 的二叉树
for i :=1 **to** n
 令第 i 个树叶的值是 a_i，令第 i 个树叶的标记为其自身
for i :=n+1 **to** 2^k
 令第 i 个树叶的值是 $-\infty$，令第 i 个树叶的标记为其自身
for i :=k−1 **downto** 0
 for 第 i 层上每个顶点 v
  令 v 的值是子女中的较大值，令 v 的标记为有较大值的那个子女的标记
for i :=1 **to** n
 ci :=根的值
 令 v 是根的标记
 令 v 的值是 $-\infty$
 while 根的标记仍是 v
  v :=parent(v)
  令 v 的值是子女中的较大值，令 v 的标记为有较大值的那个子女的标记
{c_1，…，c_n 是非降序排列的表}

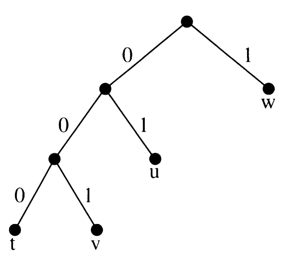
9. $k-1$，其中 $n=2^k$

10. a)是 b)否 c)是 d)是

11. a：000，e：001，i：01，k：1100，o：1101，p：11110，u：11111

12. a：11；b：101；c：100；d：01；e：00；2.25 位(注意：这个编码取决于如何打破平局，但平均位数总是一样的。)

13. 总共有 4 种可能的答案。这里给出 1 种，通过在这一种中交换 t 与 v 和(或)交换 u 与 w 来得到另外 3 种。

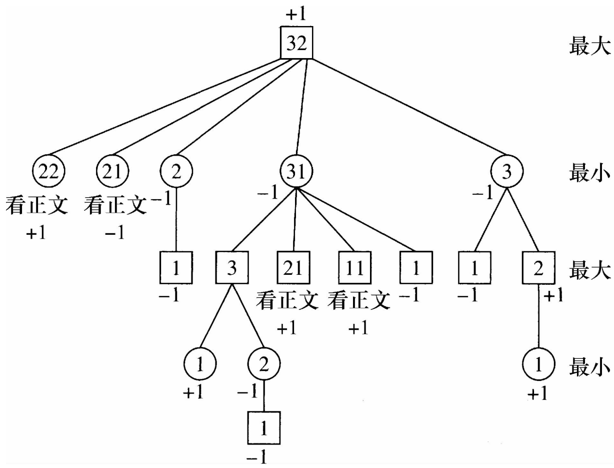


14. A：0001；B：101001；C：11001；D：00000；E：100；F：001100；G：001101；H：0101；I：0100；J：110100101；K：1101000；L：00001；M：10101；N：0110；O：0010；P：101000；Q：1101001000；R：1011；S：0111；T：111；U：00111；V：110101；W：11000；X：11010011；Y：11011；Z：1101001001。

15. A：2；E：1；N：010；R：011；T：02；Z：00。

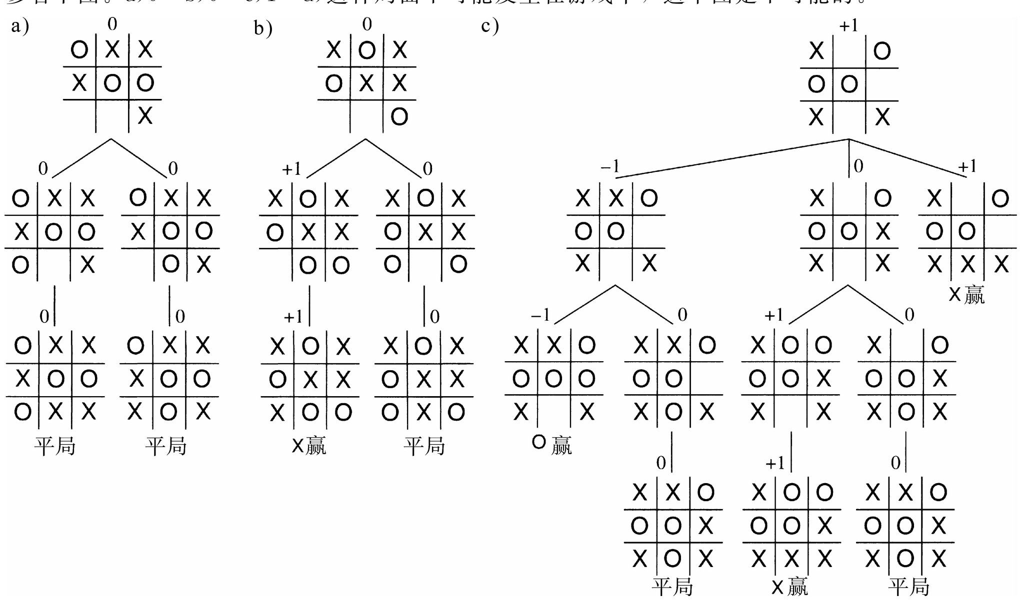
16. n

17. 由于这棵树比较大，所以在有些地方标明了“看正文”。参看图 9，以方框或圆圈顶点为根的子树与图 9 中的对应子树完全一样。第一个玩家获胜。



18. a)1 美元　　b)3 美元　　c)－3 美元

19. 参看下图。a)0　b)0　c)1　d)这种局面不可能发生在游戏中，这个图是不可能的。



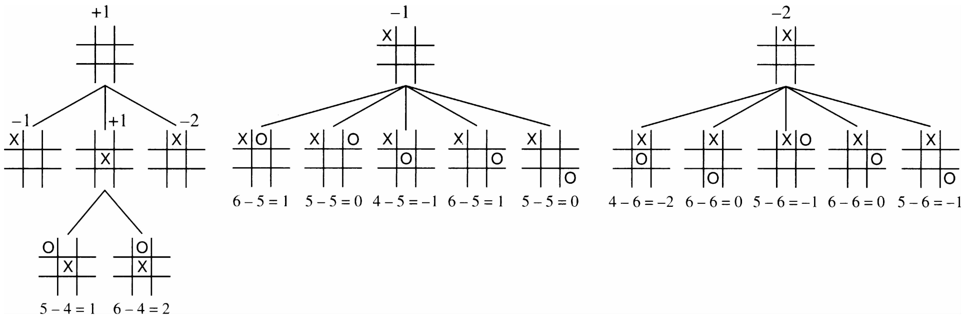
20. 用强归纳法证明。

基础步骤：当每堆有 $n=2$ 块石子时，若选手一从一堆中取走两块石子，则选手二从剩下那堆中取一块石子而获胜。若选手一从一堆取走一块石子，则选手二从另一堆取两块石子而获胜。

归纳步骤：假设归纳假设，即对于所有 $2\leqslant j\leqslant k$，如果游戏从两堆各有 j 块的石子开始，则选手二获胜，其中 $k\geqslant 2$。考虑两堆各有 $k+1$ 块石子的游戏。若选手一从一堆取走所有石子，则选手二从剩下那堆取走除了一块外的所有石子而获胜。否则选手一在一堆中留下 j 块石子，其中 $2\leqslant j\leqslant k$，而在另一堆留下 $k+1$ 块石子。选手二从较大的一堆取走同样多石子，也给这堆留下 j 块石子。此时的游戏包含各有 j 块的两堆石子。根据归纳假设，在目前游戏中选手二(也是实际游戏中的选手二)获胜，强归纳法完成了。

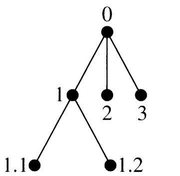
21. 7；49

22. 树的值是 1。注意：第二和第三棵树是第一棵树树根两个子女的子树，其子树由于篇幅限制而没有显示。应当认为把它们嫁接到第一幅图中。



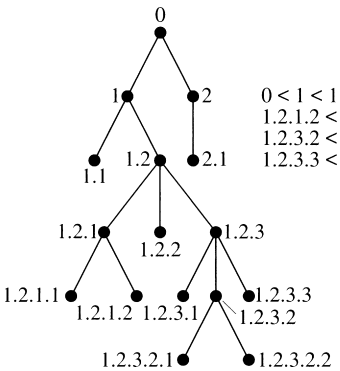
7.3 节

1.



0 < 1 < 1.1 < 1.2 < 2 < 3

2.



0 < 1 < 1.1 < 1.2 < 1.2.1 < 1.2.1.1 < 1.2.1.2 < 1.2.2 < 1.2.3 < 1.2.3.1 < 1.2.3.2 < 1.2.3.2.1 < 1.2.3.2.2 < 1.2.3.3 < 2 < 2.1

3. 否

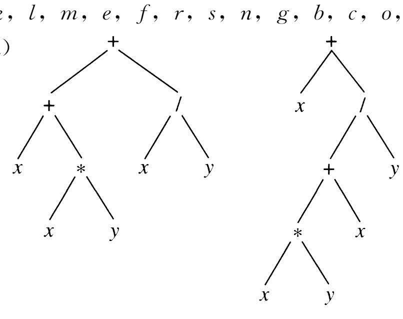
4. *a*，*b*，*d*，*e*，*f*，*g*，*c*

5. *a*，*b*，*e*，*k*，*l*，*m*，*f*，*g*，*n*，*r*，*s*，*c*，*d*，*h*，*o*，*i*，*j*，*p*，*q*

6. *d*，*f*，*g*，*e*，*b*，*c*，*a*

7. *k*，*l*，*m*，*e*，*f*，*r*，*s*，*n*，*g*，*b*，*c*，*o*，*h*，*i*，*p*，*q*，*j*，*d*，*a*

8. a)



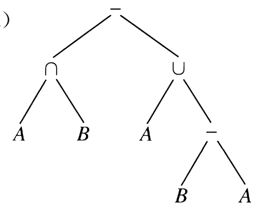
b) $++x*xy/xy$，$+x/+*xyxy$　　c) $xxy*+xy/+$，$xxy*x+y/+$

d) $((x+(x*y))+(x/y))$，$(x+(((x*y)+x)/y))$

9.

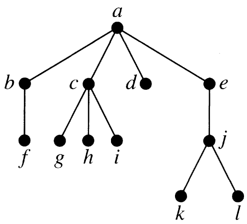
b) $-\cap AB\cup A-BA$　c) $AB\cap ABA-\cup-$

d) $((A\cap B)-(A\cup(B-A)))$

a) 

10. 14

11. a)1 b)1 c)4 d)2205

12. 

13. 用数学归纳法。对一个元素的表来说结果是平凡的。假定对 n 个元素的表来说结果为真。对于归纳步骤，从后面开始。找出表后面的顶点序列，从最后一个树叶开始，到根结束，每个顶点都是它后面那个顶点的最后一个儿子。删除这个树叶并且应用归纳假设。

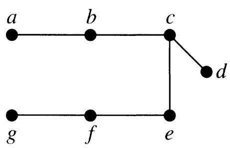
14. 在每种情形里分别为 c，d，b，f，g，h，e，a。

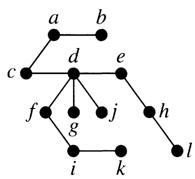
15. 用数学归纳法证明。设 $S(X)$和 $O(X)$分别表示合式公式 X 中的符号数和运算数。对长度为 1 的合式公式来说命题为真，因为它们都有 1 个符号和 0 个运算。假定对长度小于 n 的合式公式来说命题为真。长度为 n 的合式公式必然形如 $*XY$，其中 $*$ 是运算符而 X 和 Y 都是长度小于 n 的合式公式。于是根据归纳假设，$S(*XY)=S(X)+S(Y)=[O(X)+1]+[O(Y)+1]=O(X)+O(Y)+2$。因为 $O(*XY)=1+O(X)+O(Y)$，所以 $S(*XY)=O(*XY)+1$。

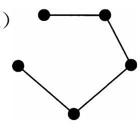
16. 例如，$xy+zx\circ+x\circ$，$xyz++yx++$，$xyxy\circ\circ xy\circ\circ z\circ+$，$xz\times$，$zz+\circ$，$yyyy\circ\circ\circ$，$zx+yz+\circ$

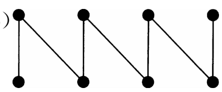
7.4 节

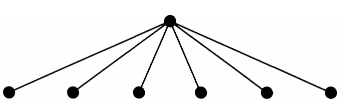
1. $m-n+1$

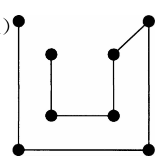
2. 

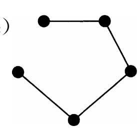
3. 

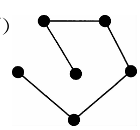
4. a) 

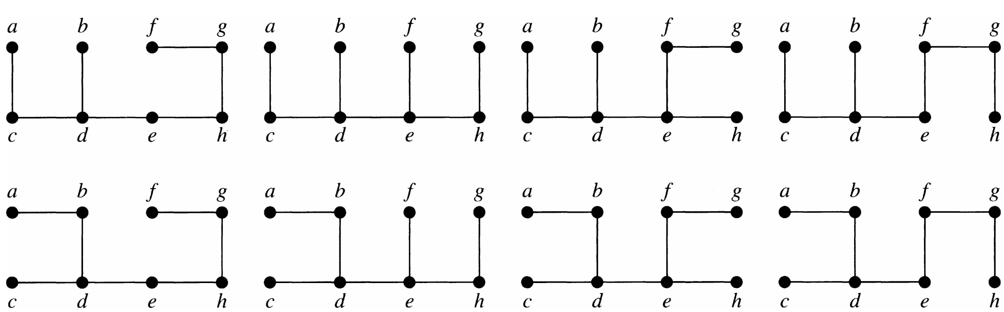
b) 

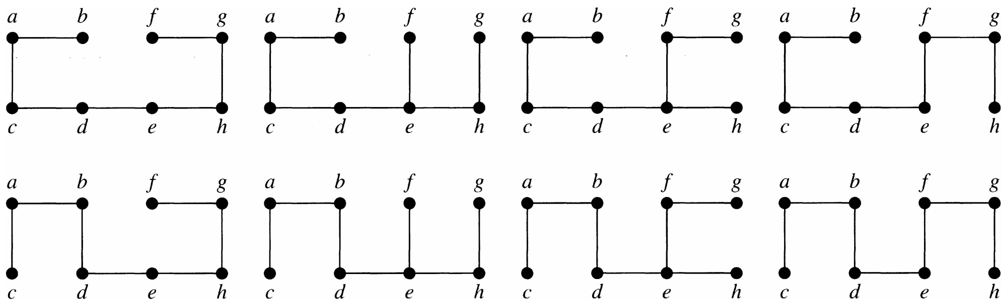
c) 

d) 

e) 

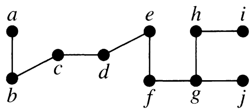
f) 

5. 

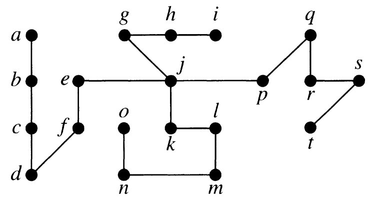


6. a)3　　b)16　　c)4　　d)5

7.



8.



9. a)长度为 6 的路径　　b)长度为 5 的路径

c)长度为 6 的路径　　d)与访问顶点的选择顺序有关，可能是长度为 7 的路径

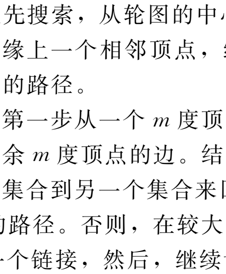
10. 采用宽度优先搜索，初始顶点是中心顶点，处理该顶点时把 n 个轮辐顶点加入树中，因此产生的树是 $K_{1,n}$。采用深度优先搜索，从轮图的中心顶点开始，并访问一个相邻顶点(边缘上顶点中的一个)。从这个顶点转移到边缘上一个相邻顶点，继续这样绕圈下去，直到已经到达了每个顶点。因此产生的生成树是长度为 n 的路径。

11. 采用宽度优先搜索，第一步从一个 m 度顶点辐射到所有 n 度顶点。下一步处理一个 n 度顶点，加入从这个顶点到所有剩余 m 度顶点的边。结果是一个 $K_{1,n-1}$ 和一个 $K_{1,m-1}$，中心用一边相连。采用深度优先搜索，从一个集合到另一个集合来回移动，直到不能前进为止。如果 $m=n$ 或 $m=n-1$，则得到长度为 $m+n-1$ 的路径。否则，在较大的集合中还有未被访问的顶点时该路径停止。所以，返回到顶点 V 的路径上一个链接，然后，继续访问从顶点 v 出发的集合中的剩余顶点。

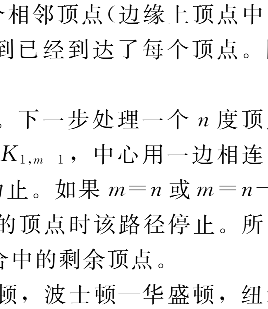
12. 一组可能不再继续下去的航班是：波士顿—纽约，底特律—波士顿，波士顿—华盛顿，纽约—华盛顿，纽约—芝加哥，亚特兰大—华盛顿，亚特兰大—达拉斯，亚特兰大—洛杉矶，亚特兰大—圣路易斯，圣路易斯—达拉斯，圣路易斯—底特律，圣路易斯—丹佛，达拉斯—圣迭哥，达拉斯—洛杉矶，达拉斯—旧金山，圣迭哥—洛杉矶，洛杉矶—旧金山，旧金山—西雅图。

13. 通过对通路的长度进行归纳来证明：若通路长度为 0，则结果为真。若长度为 1，则 u 与 v 是相邻的，所以 u 是在宽度优先生成树的 1 层上。假定对长度为 l 的通路来说，结果为真。若通路长度为$l+1$，则设 u'是从 v 到 u 的最短通路上倒数第二个顶点。根据归纳假设，u'是在宽度优先生成树的 l 层上。假如 u 是在不超过 l 的层上，那么显然从 v 到 u 的最短通路的长度也不超过 l。所以在添加 l 层的顶点之后，仍然没有添加 u 到宽度优先生成树上。因为 u 是与 u'相邻的，所以将把它添加在 $l+1$ 层上(尽管连接 u'和 u 的边不必添加)。

14. a)无解　　b)



c)



15. 从某个顶点开始并且沿着一条通路前进，尽量不重复经过顶点，在所有顶点都已经访问过之后，允

许返回到出发点。当不可能沿着一条通路继续下去时，就回溯并且尝试当前通路的另外一种扩充。

16. 取 G 的连通分支的生成树的并图。它们都是不相交的，所以结果是一个森林。

17. $m-n+c$

18. 假设我们希望使用算法 1 弄清楚，从 V_1 开始到 G 中其他顶点的最短路径的长度，在算法的第二行，增加 $L(v_1):=0$，最后在 **then** 子句增加 $L(w):=1+L(v)$作为第三部。

19. 在 BFS 算法中添加一条指令用于标记每一个遇到的顶点，当 BFS 结束后，我们已经找到了一个连通分支，重复操作，从一个未标记的顶点开始，以此方法继续，直到所有的顶点都被标记。

20. 树

21. 在每一个分支使用深度优先搜索。

22. 当我们在顶点 u 进行深度优先搜索时，如果边 uv 没有出现，那么一定是顶点 v 已经被访问过了。这里有两种情况。如果在我们开始时从 u 搜索后顶点 v 被访问，那么，因为我们没有完成 u 处的搜索进程，所以 v 一定出现在以 u 为根的子树中(因此一定是 u 的子孙)。另一方面，如果 v 的搜索进程在 u 的搜索进程开始之前就开始了，那么为什么这条边最终没有被算出，一定是因为我们没有完成 v 的搜索进程，换句话说，我们一直在建立以 v 为根的子树，因此 u 是 v 的子孙，v 也是 u 的祖先。

23. 如果正在处理的图本身是棵树，则这两个过程肯定产生相同的生成树，因为在这种情形下，只有一棵生成树(整个图)。而且这也是发生这种情况的唯一情形。如果原图有任何其他的边，则根据练习 22，这些边一定是背边，因此把一个顶点连到祖先或后代，而这些边一定连接同层上或相差一层上的顶点。显然这两种可能性是互斥的。因此如果两棵生成树注定是相同的，则除了树上的边之外没有其他的边了。

24. 由于在这个过程中不沿着生成树以外的边前进，所以可以忽略这些边。因此可以假设这个图起初是一棵根树。基础情形为真(只有一个顶点)，所以归纳假设，即应用在 n 个顶点的树上的宽度优先搜索按照顶点在树上的层次来访问这些顶点。考虑有 $n+1$ 个顶点的树 T。在这个树的宽度优先搜索中，最后一个访问的顶点是最后一个加入等待处理顶点表的那个顶点。当正在处理这个顶点的父母(比如说 u)时加入这个顶点。必须证明 v 是在树的最低(最底，即层数最大)的层上。假如不是这样，比如说顶点 x 是在更低层上，x 的父母是 w。则 w 是在比 u 更低的层上。显然 v 一定是树叶，因为在看见 v 之前不应该看见 v 的任何子女。考虑从 T 删除 v 后得到的树 T'。根据归纳假设，T' 中的顶点一定是按照其在 T' 中的层次来处理的(这个层次与其在 T 中的层次相同，T' 中少了 v 对算法其余部分没有影响)。因此一定在 w 之前处理过 u 了，因此 v 应当在 x 之前加入等待表，矛盾。因此 v 是在树的最底层，证毕。

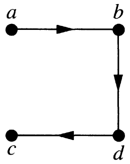
25. 这样修改算法 2 给出的伪代码：在算法开头把 m 初始化为 0，在从 L 删除 v 的语句后增加语句"$m:=m+1$"和"把 m 赋给顶点 v"。

26. 如果在深度优先搜索过程中处理有向边 uv 的起点 u 时，没有沿着边 uv 前进，则只能是这样的情形，就是已经访问过顶点 v 了。有三种情形。如果是在开始处理 u 之后访问的 v，则由于还没有结束处理 u，所以 v 一定出现在以 u 为根的子树中(因此一定是 u 的后代)，所以有一条前进边。否则，在开始处理 u 之前一定已经开始处理 v 了。如果还没有结束处理 v(即还在构造以 v 为根的子树)，则 u 是 v 的后代，因此 v 是 u 的祖先(有一条背边)。最后，如果已经结束了处理 v，则根据定义，就有了一条交叉边。

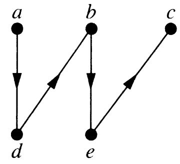
27. 设 T 是在图 3 里构造的生成树，而 T_1、T_2、T_3 和 T_4 是在图 4 里的生成树。用$d(T', T'')$表示 T' 与 T''之间的距离。则 $d(T, T_1)=6$，$d(T, T_2)=4$，$d(T, T_3)=4$，$d(T, T_4)=2$，$d(T_1, T_2)=4$，$d(T_1,T_3)=4$，$d(T_1, T_4)=6$，$d(T_2, T_3)=4$，$d(T_2, T_4)=2$，$d(T_3, T_4)=4$。

28. 假定 $e_1=\{u, v\}$是像规定的那样。则 $T_2\cup\{e_1\}$包含一个包含 e_1 的简单回路 C。图 $T_1-\{e_1\}$包含两个连通分支。e_1 的端点是在两个不同的分支里。从 u 开始按照与 e_1 相反的方向前进，直到你来到 v 所在的分支里第一个顶点为止。刚刚经过的边是 e_2。显然 $T_2\cup\{e_1\}-\{e_2\}$是树，因为 e_2 是在 C 上。另外 $T_1-\{e_1\}\cup\{e_2\}$也是树，因为 e_2 重新连接这两个分支。

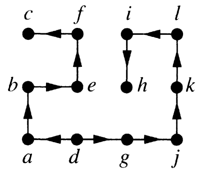
29. 练习 10：



练习 11：



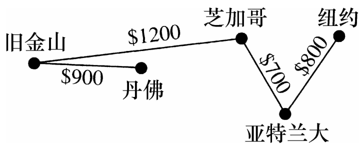
练习 12：



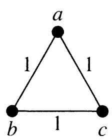
30. 首先构造这个有向图里的欧拉回路。然后从这个回路删除通向从前访问过的顶点的每条边。

7.5 节

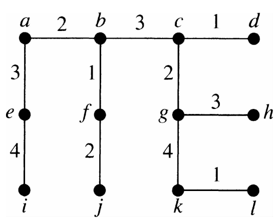
1. Deep Springs－Oasis，Oasis－Dyer，Oasis－Silverspeak，Silverspeak－Goldfield，Lida－Gold Point，Gold Point－Beatty，Lida－Goldfield，Goldfield－Tonopah，Tonopah－Manhattan，Tonopah－Warm Springs
2. $\{e, f\}$，$\{c, f\}$，$\{e, h\}$，$\{h, i\}$，$\{b, c\}$，$\{b, d\}$，$\{a, d\}$，$\{g, h\}$
3.



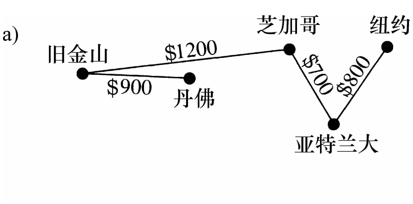
4. $\{e, f\}$，$\{a, d\}$，$\{h, i\}$，$\{b, d\}$，$\{c, f\}$，$\{e, h\}$，$\{b, c\}$，$\{g, h\}$
5.



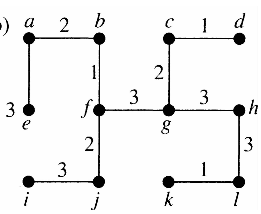
6. 在每个阶段不选择最小边，而是选择性质相同的最大边。
7. 首先求 n 阶图 G 的最小生成树 T。然后对 $i=1$ 到 $n-1$，只从 G 中删除 T 的第 i 条边，并求剩余图的最小生成树。从这 $n-1$ 个树中挑选长度最短的一个。
8. 如果所有边的大小都不同，在普林算法的正确性证明中，当把边 e_{k+1} 加入 T 并删除边 e 时就得出矛盾，而不是可能产生另一个生成树。
9.



10. a)



b)



11. 索林算法每个阶段都产生森林，因此在选择 $n-1$ 条边后就产生树。还需要证明这棵树是最小生成树。设 T 是与索林树 S 具有最多公共边的最小生成树。如果 $T\neq S$，则存在边 $e\in S-T$，在算法的某个阶段将 e 加入，而在那个阶段之前，S 中所有的边也都在 T 中。$T\cup\{e\}$ 包含唯一的简单回路。在这个回路上找这样的边 $e'\in S-T$ 和 $e''\in T-S$，当把这个阶段的各个树看做“超顶点”时，e' 和 e'' 是“相邻的”。则根据这个算法，$w(e')\leqslant w(e'')$。于是把 T 换成 $T-\{e''\}\cup\{e'\}$ 就产生出比 T 更接近 S 的最小生成树。
12. 这 r 棵树每一棵都用一条新边至少连到一个其他的树上。因此结果中至多有 $r/2$ 棵树(每棵新树包含两个以

上老树)。为了这样做，需要加入 $r-(r/2)=r/2$ 条边。因为加入边的数目是整数，所以至少是$\lceil r/2 \rceil$。

13. 如果 $k \geqslant \log n$，则 $n/2^k \leqslant 1$，故$\lceil n/2^k \rceil=1$，所以这个算法至多在 $\log n$ 次迭代后终止。

14. 假设最小生成树包括简单环路 C 中权值最大的边 $e=uv$。从 T 中删除 e，这就创造了一个有两个分支组成的森林，一个包含 u，另一个包含 v。从 u 开始，沿着 $C-e$ 的路径行进，在某一点这条路径一定会通过边 f 从包含 u 的 $T-e$ 分支跳到包含 v 的 $T-e$ 分支上。这一条边不可能在 T 中，因为 e 不可能是连接 T 两个分支唯一的边(否则 T 中将存在一个简单环路)。因为 e 是 C 中权值最大的边，所以 f 权值较小。在 T 中用 f 代替 e 的树将拥有更小的权值，这与已知矛盾。

补充练习

1. 假设 T 是树，显然 T 没有简单回路。如果加入边 e 连接两个不相邻顶点 u 和 v，显然形成一个简单回路，因为把 e 加入 T 导致了图有太多的边而不再是树。形成的唯一简单回路包含边 e 和 T 中从 u 到 v 的唯一路径 P。假设 T 满足给定条件。只需证明 T 连通，因为图中没有简单回路。设 u 和 v 在不同连通分支里。加入边 $e=\{u, v\}$就不满足题目中的条件。

3. 假设树 T 有 n 个顶点，度分别为 $d_1, d_2, \cdots, d_n$，因为 $2e=\sum_{i=1}^{n} d_i$ 且 $e=n-1$，则有 $2(n-1)=\sum_{i=1}^{n} d_i$。因为每个 $d_i \geqslant 1$，所以 $2(n-1)=n+\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)$，即 $n-2=\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)$。于是和中至多有 $n-2$ 项可以大于等于 1。因此其中至少两项为 0。所以至少对两个 i 值有 $d_i=1$。

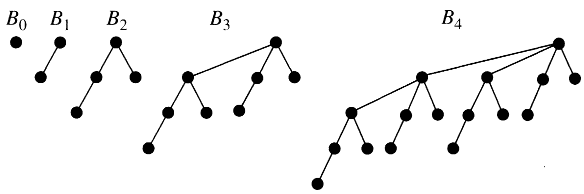
5. $2n-2$

7. T 没有回路，因此不可能有子图同胚于 $K_{3,3}$ 或 K_5。

9. 分别给每个连通分支着色。对每个连通分支，首先确定树根，然后把所有偶数层顶点染成红色，把所有奇数层顶点染成蓝色。

11. 上界：k^h；下界：$2\lceil k/2 \rceil^{h-1}$。

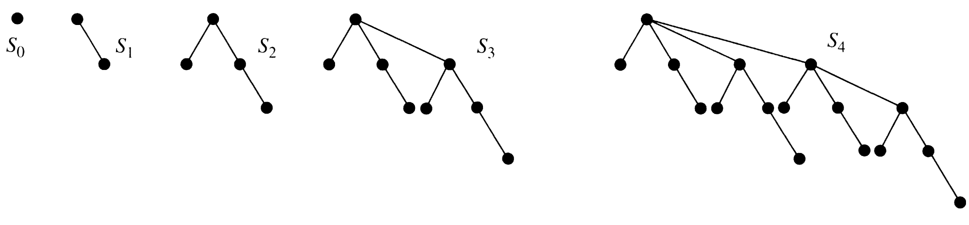
13.



15. 由于 B_{k+1}由两个 B_k 构成，其中一个下移一层，所以 k 每加 1 高度也加 1。由于 B_0 高度为 0，所以经归纳得出 B_k 高度为 k。

17. 由于 B_{k+1}的根是 B_k 的根外加一个子女(即另一个 B_k 的根)，所以 k 每加 1 根的度亦加 1。由于 B_0 的根的度为 0，所以经归纳得出 B_k 的根的度为 k。

19.



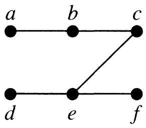
21. 用数学归纳法。对 $k=0$ 结果为平凡的。假设结果对 $k-1$ 成立。T_{k-1}是 T 的母树。根据归纳法，T 的子树可从 $T_0, \cdots, T_{k-2}$按所述方式得到。r_{k-2}与 r_{k-1}的最终相连是按照 S_k 树的定义中的描述。

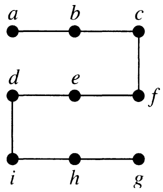
23. **procedure** level(T：带根 r 的有序根树)
    queue ≔只含根 r 的序列
    while queue 至少还含有一项
      v ≔队列中的第一个顶点
      列出 v
      从队列中删除 v 并把 v 的子女加入队尾

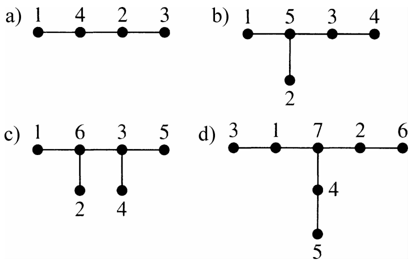
25. 这样构造树：对地址 0，插入树根。对每个带标记 i(i 是正整数)的顶点，插入子树，这个子树是从每个带标记 i 的子树构造出来的。对于正整数 j，也是如此。

27. a)是　　b)否　　c)是

29. 得到的图没有边，是在超过一个的所述类型的简单回路上，所以是仙人掌图。

31. 

33. 

35. 

37. 6

39. a)0 表示 00，11 表示 01，100 表示 10，101 表示 11(具体编码与如何消除平局有关，但所有编码都是等价的)；长度为 n 的串的平均长度是 $0.645n$。

    b)0 表示 000，100 表示 001，101 表示 010，110 表示 100，11100 表示 011，11101 表示 101，11110 表示 110，11111 表示 111(具体编码与如何消除平局有关，但所有编码都是等价的)；长度为 n 的串的平均长度是 $0.532\overline{6}n$。

41. 设从 G 删除顶点 v 和 v 关联的所有边后得到图 G'。可以这样得到 G 的最小生成树：取 v 关联的最小边和 G'的一个最小生成树。

43. 假设边 e 是顶点 v 关联的最小边，假设 T 是不含 e 的最小生成树。把 e 加入 T，从形成的简单回路中删除与 v 关联的另一条边。将得到一个具有更小权值的生成树(因为删除的边的权值比 e 的大)。这是矛盾，所以 T 必含 e。

45. 因为树中的路径都是独一无二的，所以一个有向图 G 的属性图 T 是一个以 r 为根的树，同时也是 G 的子图，包括了所有 G 的顶点以及所有从根出发的边。因此除了根结点外，每一个顶点的入度都是 1。这足以证明对于每一个顶点 $v\in V$，都有一个从 r 到 v 的唯一路径。因为除 r 之外每一个顶点入度都是 1，所以我们可以从 v 反向获取路径，这条路径不会回到先前访问过的顶点，因为那样将创建一个简单回路。因此路径最终会停止，并且只能停在入度不是 1 的 r 上。

47. a)运行宽度优先搜索算法，从 v 开始并且沿着边的方向，将每一个遇到的顶点标记为可达。

    b)在 G^{conv} 运行宽度优先搜索，沿着边的方向，并且标记每一个遇到的顶点为可达，这将确定所有顶点从 v 出发可达。

    c)选择一个顶点 v_1，并且使用 a)和 b)找出包括 v_1 的强连通分支，也就是说，对所有的顶点 w，w 对 v_1 是可达的，v_1 对 w 也是可达的。然后选择另一个不在强连通分支中的顶点 v_2，并且找到 v_2 的强连通分支。重复以上步骤知道所有的顶点都包含在内，这个算法的正确性由强连通分支的定义和 6.4 节练习 9 确定。

第 8 章

8.1 节

1. a)1　　b)1　　c)0　　d)0

2. a)$(1\cdot 1)+(\overline{0\cdot 1}+0)=1+(\overline{0}+0)=1+(1+0)=1+1=1$

   b)$(\mathbf{T}\wedge\mathbf{T})\vee(\neg(\mathbf{F}\wedge\mathbf{T})\vee\mathbf{F})\equiv\mathbf{T}$

3. a)

x	y	z	$\bar{x}y$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

b)

x	y	z	$x+yz$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

c)

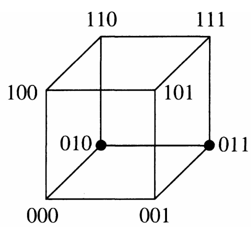
x	y	z	$x\bar{y}+\overline{xyz}$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

d)

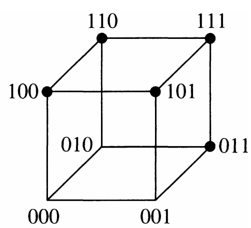
x	y	z	$x(yz+\bar{y}\bar{z})$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

4.

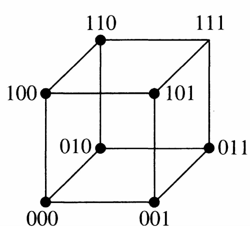
a)



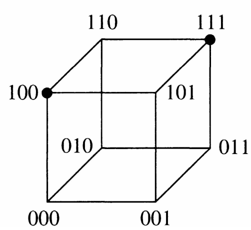
b)



c)



d)



5. (0, 0)和(1, 1)

6. $x+xy=x\cdot 1+xy=x(1+y)=x(y+1)=x\cdot 1=x$

7.

x	y	z	$x\bar{y}$	$y\bar{z}$	$\bar{x}z$	$x\bar{y}+y\bar{z}+\bar{x}z$	$\bar{x}y$	$\bar{y}z$	$x\bar{z}$	$\bar{x}y+\bar{y}z+x\bar{z}$
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

8.

x	$x+x$	$x\cdot x$
0	0	0
1	1	1

9.

x	$x+1$	$x\cdot 0$
0	1	0
1	1	0

10.

x	y	z	$y+z$	$x+(y+z)$	$x+y$	$(x+y)+z$	yz	$x(yz)$	xy	$(xy)z$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

11.

x	y	xy	$(\overline{xy})$	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x}+\overline{y}$	$x+y$	$(\overline{x+y})$	$\overline{xy}$
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1

12. $0\cdot\overline{0}=0\cdot 1=0$；$1\cdot\overline{1}=1\cdot 0=0$

13.

x	y	$x\oplus y$	$x+y$	xy	$(\overline{xy})$	$(x+y)(\overline{xy})$	$x\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,\overline{y}+\overline{x}\,y$
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

14. a)对，用真值表可证　　b)错，如取 $x=1$，$y=1$，$z=1$。
c)错，如取 $x=1$，$y=1$，$z=0$。

15. 根据德·摩根律，对一个表达式的求补，除了变元取补外，其余如同求此表达式的对偶。

16. 16

17. 如果将每个 0 用 **F** 代替，1 用 **T** 代替，布尔和用 $\vee$ 代替，布尔积用 $\wedge$ 代替，$^{-}$ 用 $\neg$ 代替(并且 x 用 p 代替，y 用 q 代替，使得变量看起来像它们表示的命题，等号用逻辑等价符号代替)，那么 $\overline{xy}=\overline{x}+\overline{y}$ 变成 $\neg(p\wedge q)\equiv\neg p\vee\neg q$，$\overline{x+y}=\overline{xy}$ 变成 $\neg(p\vee q)\equiv\neg p\wedge\neg q$。

18. 由控制律、分配律和同一律，$x\vee x=(x\vee x)\wedge 1=(x\vee x)\wedge(x\vee\overline{x})=x\vee(x\wedge\overline{x})=x\vee 0=x$。类似地，$x\wedge x=(x\wedge x)\vee 0=(x\wedge x)\vee(x\wedge\overline{x})=x\wedge(x\vee\overline{x})=x\wedge 1=x$。

19. 由同一律和交换律，$0 \vee 1=1$ 且 $0 \wedge 1=0$，从而 $\overline{0}=1$。类似地，由于 $1 \vee 0=1$ 且 $1 \wedge 0=0$，从而 $\overline{1}=0$。
20. 首先注意 $x \wedge 0=0$ 且 $x \vee 1=1$，对任意 x 成立，这很容易证明。为证明第一个等式，只要证明 $(x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})=1$ 且 $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y})=1$。由结合律、交换律、分配律、控制律和同一律可知，$(x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})=y \vee (x \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}))=y \vee ((x \vee \bar{x}) \wedge (x \vee \bar{y}))=y \vee (1 \wedge (x \vee \bar{y}))=y \vee (x \vee \bar{y})=(y \vee \bar{y}) \vee x=1 \vee x=1$，且 $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y})=\bar{y} \wedge (\bar{x} \wedge (x \vee y))=\bar{y} \wedge ((\bar{x} \wedge x) \vee (\bar{x} \wedge y))=\bar{y} \wedge (0 \vee (\bar{x} \wedge y))=\bar{y} \wedge (\bar{x} \wedge y)=\bar{x} \wedge (y \wedge \bar{y})=\bar{x} \wedge 0=0$。类似可证第二个等式。
21. 由假设、练习 18 和分配律可得，$x=x \vee 0=x \vee (x \vee y)=(x \vee x) \vee y=x \vee y=0$。类似地，有 $y=0$。为证明第二个等式，注意 $x=x \wedge 1=x \wedge (x \wedge y)=(x \wedge x) \wedge y=x \wedge y=1$。类似地，$y=1$。
22. 用第 4 章补充练习 39 和 41 以及有补分配格的定义来建立定义中的五对定律。

8.2 节

1. a) $\bar{x}\bar{y}z$　b) $\bar{x}y\bar{z}$　c) $\bar{x}yz$　d) $\overline{xyz}$
2. a) $xyz+xy\bar{z}+x\bar{y}z+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}yz+\bar{x}y\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z$　b) $xyz+xy\bar{z}+\bar{x}yz$
   c) $xyz+xy\bar{z}+x\bar{y}z+x\bar{y}\bar{z}$　d) $x\bar{y}z+x\bar{y}\bar{z}$
3. $wxy\bar{z}+wx\bar{y}z+w\bar{x}yz+\bar{w}xyz+\bar{w}x\bar{y}\bar{z}+\bar{w}\bar{x}\bar{y}z+\bar{w}\bar{x}y\bar{z}+w\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
4. a) $\bar{x}+\bar{y}+z$　b) $x+y+z$　c) $x+\bar{y}+z$
5. $y_1+y_2+\cdots y_n=0$ 当且仅当 $y_i=0$ 对 $i=1, 2, \cdots, n$ 都成立。本题成立当且仅当，若 $y_i=x_i$，则 $x_i=0$；若 $y_i=\bar{x}_i$，则 $x_i=1$。
6. a) $x+y+z$
   b) $(x+y+z)(x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+z)(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+y+\bar{z})$
   c) $(x+y+z)(x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+z)(x+\bar{y}+\bar{z})$
   d) $(x+y+z)(x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+z)(x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$
7. a) $x+y+z$
   b) $x+\overline{[y+\overline{(\bar{x}+z)}]}$
   c) $\overline{(x+\bar{y})}$
   d) $\overline{[x+\overline{(x+\bar{y}+\bar{z})}]}$
8. a)

x	$\bar{x}$	$x \downarrow x$
1	0	0
0	1	1

b)

x	y	xy	$x \downarrow x$	$y \downarrow y$	$(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0

c)

x	y	$x+y$	$(x \downarrow y)$	$(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$
1	1	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	0	1	0

9. a) $\{[(x \mid x) \mid (y \mid y)] \mid [(x \mid x) \mid (y \mid y)]\} \mid (z \mid z)$
   b) $\{[(x \mid x) \mid (z \mid z)] \mid y\} \mid \{[(x \mid x) \mid (z \mid z)] \mid y\}$
   c) x

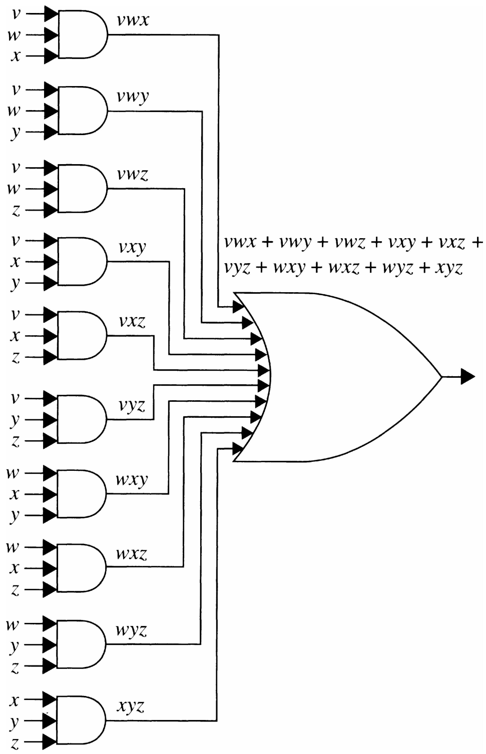
d)$[x \mid (y \mid y)] \mid [x \mid (y \mid y)]$

10. 用＋和·不能表示$\bar{x}$，因为当输入为 1 时，无法取得值 0。

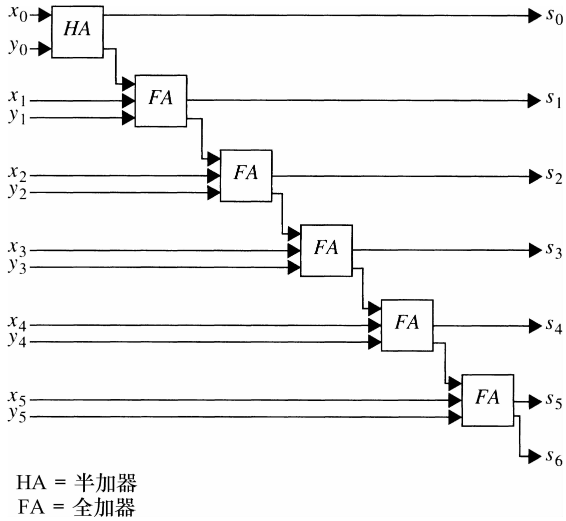
8.3 节

1. $(x+y)\bar{y}$　　2. $(\overline{xy})+(\bar{z}+x)$　　3. $(x+y+z)+(\bar{x}+y+z)+(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$

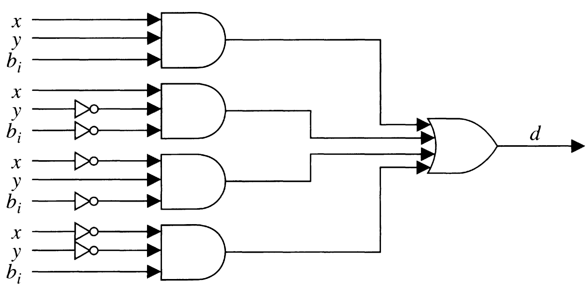
4.

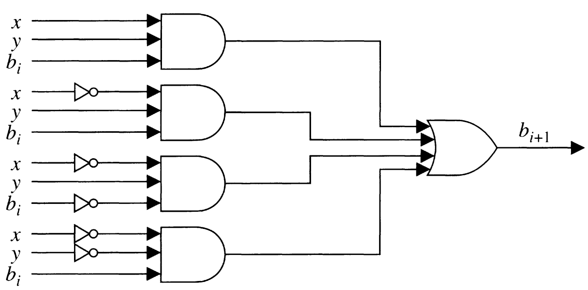


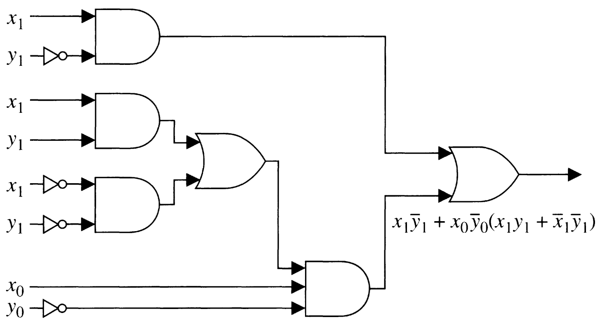
5.

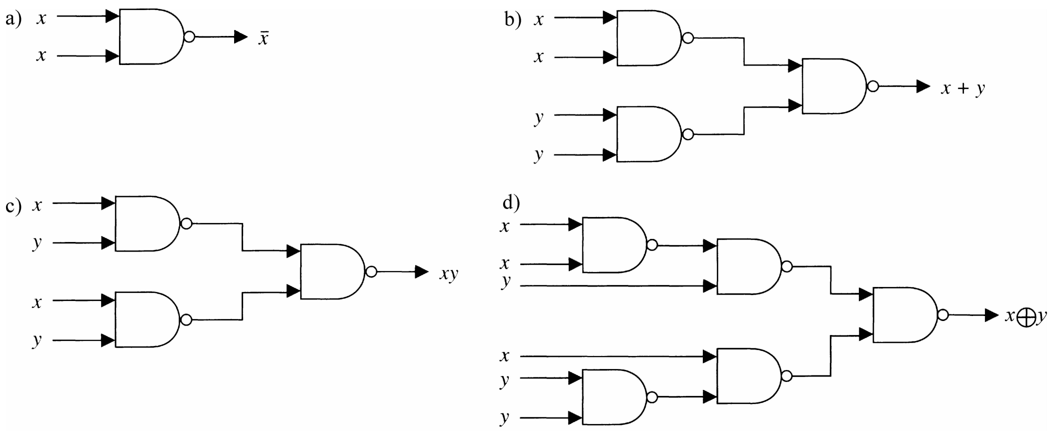


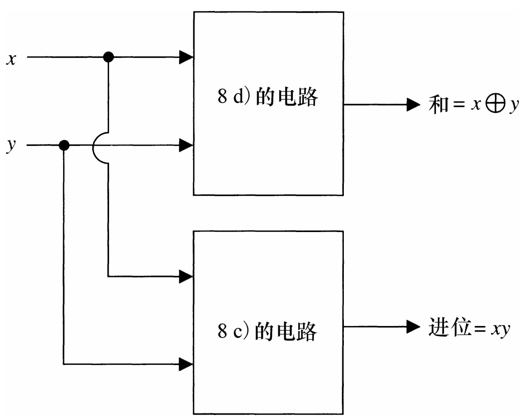
6.

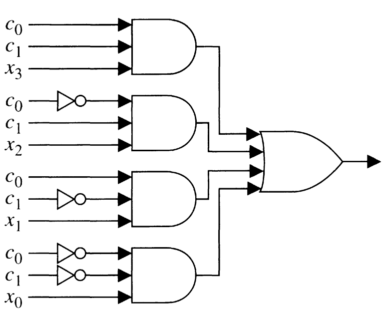




7. 
x_1
y_1
x_1
y_1
x_1
y_1
x_0
y_0
$x_1\bar{y}_1 + x_0\bar{y}_0(x_1y_1 + \bar{x}_1\bar{y}_1)$

8. 
a) x
x
$\bar{x}$
b) x
x
y
y
$x + y$
c) x
y
x
y
xy
d)
x
x
y
x
y
y
$x \oplus y$

9. 
x
y
8 d)的电路
和 = $x \oplus y$
8 c)的电路
进位 = xy

10. 
c_0
c_1
x_3
c_0
c_1
x_2
c_0
c_1
x_1
c_0
c_1
x_0

8.4 节

1. a)

	y	$\overline{y}$
x		
$\overline{x}$	1	

b) xy 和 $\overline{xy}$

2. a)

	y	$\overline{y}$
x		1
$\overline{x}$		

b)

	y	$\overline{y}$
x	1	
$\overline{x}$		1

c)

	y	$\overline{y}$
x	1	1
$\overline{x}$	1	1

3. a)

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x				
$\overline{x}$		1		

b) $\overline{x}yz$，$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$，$xy\overline{z}$

4. a)

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x			1	
$\overline{x}$				

b)

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x				
$\overline{x}$	1		1	

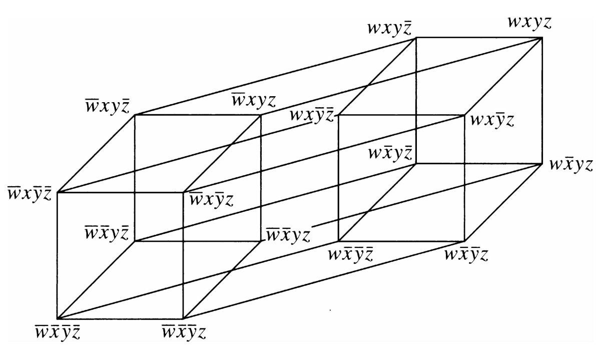
c)

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x	1	1		1
$\overline{x}$				1

5. 隐含数：xyz，$xy\overline{z}$，$x\overline{y}\,\overline{z}$，$\overline{x}y\overline{z}$，$xy$，$x\overline{z}$，$y\overline{z}$；素隐含数：$xy$，$x\overline{z}$，$y\overline{z}$；本原素隐含数：$xy$，$x\overline{z}$，$y\overline{z}$。

	yz	$y\overline{z}$	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$
x	1	1	1	
$\overline{x}$		1		

6. 右边的 3 立方体对应 w；整个图的顶表面给出的 3 立方体表示 x；背面给出的 3 立方体表示 y；左边和右边两个 3 立方体的右面给出的 3 立方体表示 z。在每种情形下，相对的三面表示互补的文字。表示 wz 的 2 立方体是右边的 3 立方体的右面；表示 $\overline{x}y$ 的 2 立方体是后边的 3 立方体的底面；表示 $\overline{y}\,\overline{z}$ 的 2 立方体是左前面。



7. a)

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
wx				
$w\bar{x}$				
$\bar{w}\bar{x}$				
$\bar{w}x$		1		

b) $\bar{w}xyz$，$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$，$\bar{w}x\bar{y}\bar{z}$，$\bar{w}x\bar{y}\bar{z}$

8. a)

	$x_3x_4x_5$	$x_3x_4\bar{x}_5$	$x_3\bar{x}_4\bar{x}_5$	$x_3\bar{x}_4x_5$	$\bar{x}_3\bar{x}_4x_5$	$\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5$	$\bar{x}_3x_4\bar{x}_5$	$\bar{x}_3x_4x_5$
x_1x_2	1	1						
$x_1\bar{x}_2$								
$\bar{x}_1\bar{x}_2$								
$\bar{x}_1x_2$								

b)

	$x_3x_4x_5$	$x_3x_4\bar{x}_5$	$x_3\bar{x}_4\bar{x}_5$	$x_3\bar{x}_4x_5$	$\bar{x}_3\bar{x}_4x_5$	$\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5$	$\bar{x}_3x_4\bar{x}_5$	$\bar{x}_3x_4x_5$
x_1x_2								
$x_1\bar{x}_2$								
$\bar{x}_1\bar{x}_2$	1			1				
$\bar{x}_1x_2$	1			1				

c)

	$x_3x_4x_5$	$x_3x_4\bar{x}_5$	$x_3\bar{x}_4\bar{x}_5$	$x_3\bar{x}_4x_5$	$\bar{x}_3\bar{x}_4x_5$	$\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5$	$\bar{x}_3x_4\bar{x}_5$	$\bar{x}_3x_4x_5$
x_1x_2	1	1					1	1
$x_1\bar{x}_2$								
$\bar{x}_1\bar{x}_2$								
$\bar{x}_1x_2$	1	1					1	1

d)

	$x_3x_4x_5$	$x_3x_4\bar{x}_5$	$x_3\bar{x}_4\bar{x}_5$	$x_3\bar{x}_4x_5$	$\bar{x}_3\bar{x}_4x_5$	$\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5$	$\bar{x}_3x_4\bar{x}_5$	$\bar{x}_3x_4x_5$
x_1x_2					1	1		
$x_1\bar{x}_2$					1	1		
$\bar{x}_1\bar{x}_2$					1	1		
$\bar{x}_1x_2$					1	1		

e)

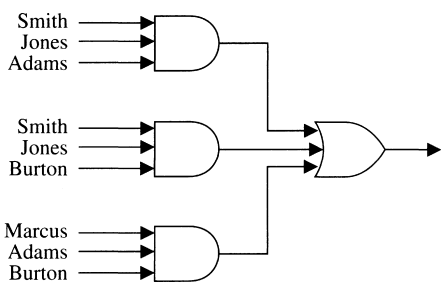
	$x_3x_4x_5$	$x_3x_4\bar{x}_5$	$x_3\bar{x}_4\bar{x}_5$	$x_3\bar{x}_4x_5$	$\bar{x}_3\bar{x}_4x_5$	$\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5$	$\bar{x}_3x_4\bar{x}_5$	$\bar{x}_3x_4x_5$
x_1x_2	1	1	1	1				
$x_1\bar{x}_2$	1	1	1	1				
$\bar{x}_1\bar{x}_2$	1	1	1	1				
$\bar{x}_1x_2$	1	1	1	1				

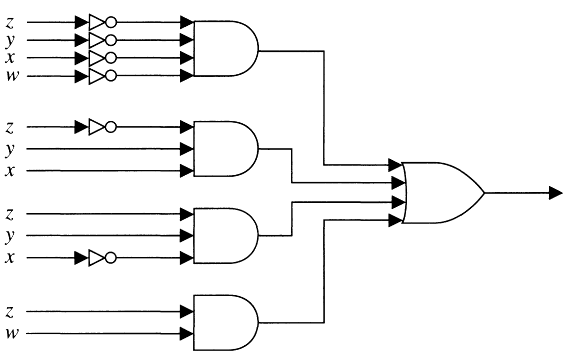
f)

	$x_3x_4x_5$	$x_3x_4\bar{x}_5$	$x_3\bar{x}_4\bar{x}_5$	$x_3\bar{x}_4x_5$	$\bar{x}_3\bar{x}_4x_5$	$\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5$	$\bar{x}_3x_4\bar{x}_5$	$\bar{x}_3x_4x_5$
x_1x_2		1	1			1	1	
$x_1\bar{x}_2$		1	1			1	1	
$\bar{x}_1\bar{x}_2$		1	1			1	1	
$\bar{x}_1x_2$		1	1			1	1	

9. a)64　　b)6

10. 行 1 和行 4 应该是相邻的。要考虑相邻性的列的对是：列 1 和 4，1 和 12，1 和 16，2 和 11，2 和 15，3 和 6，3 和 10，列 4 和 9，5 和 8，5 和 16，6 和 15，7 和 10，7 和 14，8 和 13，9 和 12，11 和 14，13 和 16。

11.


12.


13. $\bar{x}\,\bar{z}+xz$

14. 对 n 应用归纳法。若 $n=1$，则考察一端标记 0 和另一端标记 1 的线段。k 只可能取的值也是 1，且若文字是 x_1，则我们所得的子立方体是由标记 1 的端点组成的 0 维子立方体，同时若文字是 $\bar{x}_1$，则所得的子立方体是由标记 0 的端点组成的 0 维子立方体。现假设命题对 n 为真，我们必须证明它对于 $n+1$ 为真。若文字 x_{n+1}（或者它的补）不是积的组成部分，则由归纳假设，当积在 n 个变量的取值中被观察到时，它对应于 n 维立方体的一个 $(n-k)$ 维子立方体，并且这个子立方体同线段[0，1]的笛

卡儿积给出的维数高于我们所给$(n+1)$维立方体的一个子立方体，即如所要求的那样具有$(n+1)-k$维。另一方面，若文字x_{n+1}(或者它的补)是积的组成部分，则剩余$k-1$个文字的积对应于n维立方体中的一个$n-(k-1)=(n+1)-k$维子立方体，并且在最后变量中的1端或者0端的片段是要求的子立方体。

补充练习

1. a)$x=0$，$y=0$，$z=0$；$x=1$，$y=1$，$z=1$

   b)$x=0$，$y=0$，$z=0$；$x=0$，$y=0$，$z=1$；$x=0$，$y=1$，$z=0$；$x=1$，$y=0$，$z=1$；$x=1$，$y=1$，$z=0$；$x=1$，$y=1$，$z=1$

   c)无值

3. a)是　b)不是　c)不是　d)是　5. 2^{n-1}

7. a)若$F(x_1, \cdots, x_n)=1$，由支配定律可得，$(F+G)(x_1, \cdots, x_n)=F(x_1, \cdots, x_n)+G(x_1, \cdots, x_n)=1$。因此$F\leqslant F+G$。

   b)若$(FG)(x_1, \cdots, x_n)=1$，则$F(x_1, \cdots, x_n)\cdot G(x_1, \cdots, x_n)=1$，因此$F(x_1, \cdots, x_n)=1$。由此得$FG\leqslant F$。

9. 因为$F(x_1, \cdots, x_n)=1$蕴含$F(x_1, \cdots, x_n)=1$，因此$\leqslant$是自反的。设$F\leqslant G$且$G\leqslant F$，则$F(x_1, \cdots, x_n)=1$当且仅当$G(x_1, \cdots, x_n)=1$，这蕴含$F=G$，因此$\leqslant$是反对称的。设$F\leqslant G\leqslant H$，则由$F(x_1, \cdots, x_n)=1$可得$G(x_1, \cdots, x_n)=1$，此蕴含$H(x_1, \cdots, x_n)=1$，从而$F\leqslant H$，因此$\leqslant$是传递的。

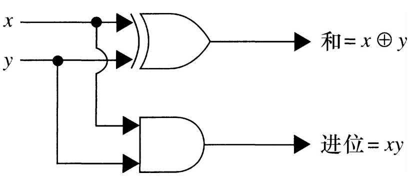
11. a)$x=1$，$y=0$，$z=0$　b)$x=1$，$y=0$，$z=0$　c)$x=1$，$y=0$，$z=0$

13.

x	y	$x\odot y$	$x\oplus y$	$\overline{(x\oplus y)}$
1	1	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1

15. 是，如真值表所示。

17. a)6　b)5　c)5　d)6

19.


21. $x_3+x_2\,\overline{x}_1$

23. 设它具有权值a和b，则存在实数T使得对$(1, 0)$和$(0, 1)$，有$xa+yb\geqslant T$。但对$(0, 0)$和$(1, 1)$，有$xa+yb<T$。从而$a\geqslant T$，$b\geqslant T$，$0<T$，且$a+b<T$。这样，a和b都是正的，这蕴含$a+b>a\geqslant T$，矛盾。