2013-2014 学年第二学期高等数学试题 (A)

一、填空题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 等于____________。

2. 设平面经过原点及点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，则此平面方程为____________。

3. 积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$ 的值等于____________。

4. 设 $z = x^3 f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$, f 具有二阶连续偏导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$ ______。

5. 设 L 为由圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限中所围图形的边界，计算 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds =$ ______。

二、选择题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）

6. 设 $u(x,y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t)\,dt$，其中函数 φ 具有二阶连续导数，ψ 具有一阶导数，则必有____________。

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；　(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

7. 曲面 $3x^2+y^2+z^2=12$ 上点 $M(-1,0,3)$ 处的切平面与平面 $z=0$ 的夹角为____________。

(A) $\frac{\pi}{6}$；　(B) $\frac{\pi}{4}$；　(C) $\frac{\pi}{3}$；　(D) $\frac{\pi}{2}$

8. 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2\ (z \ge 0)$, Σ_1 为 Σ 在第一卦限中的部分，则有__________。

(A) $\iint_{\Sigma} x ds = 4\iint_{\Sigma_1} x ds$；　(B) $\iint_{\Sigma} y ds = 4\iint_{\Sigma_1} x ds$；

(C) $\iint_{\Sigma} z ds = 4\iint_{\Sigma_1} x ds$；　(D) $\iint_{\Sigma} xyz ds = 4\iint_{\Sigma_1} xyz ds$

9．累次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)r\mathrm{d}r$可以写成__________。

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f\left(x,y\right)dx$；　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f\left(x,y\right)dx$；

(C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f\left(x,y\right)dy$；　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f\left(x,y\right)dy$

10．若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$是____________。

(A)绝对收敛；　(B)条件收敛；　(C)发散；　(D 可能)收敛，也可能发散

三、(12 分）求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$的收敛半径，收敛区间及和函数。

四、(12 分)

1.设直线$L:\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$，平面$\pi:x+y+z=0$，

（1）求直线L在平面π上的投影直线L_0的方程。

（2）求直线L_0绕z轴旋转一周所得曲面的方程。

2. 设函数$f(u)$具有连续导数，求$\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^2}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$。

五、(10 分)

1. 假设$f\left(x\right)$在区间$\left[0,1\right]$上连续，记$\int_0^1 f\left(x\right)dx=6$，

求$\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f\left(x\right)f\left(y\right)f\left(z\right)dz$。

2.设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧，

求$I=\oiint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(xdydz+ydzdx+zdxdy\right)$

六、(10 分）计算曲线积分$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中$L$是以点$\left(1,0\right)$为中心，$R$为半径的圆周$\left(R>1\right)$，取逆时针方向。

七、(10 分）设$z=z\left(u,v\right)$具有二阶连续偏导数，且$z=z\left(x-2y,x+3y\right)$满足

$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$，求$z=z\left(u,v\right)$所满足的关系式。

八、（6分）设函数 $f(x,y)$ 在圆域 $x^2+y^2\le 1$ 上二阶连续可微，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$，

计算 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$。