答案（请各位老师在阅卷前先演算一遍，发现错误及时反馈。谢谢！）

一、填空题(每小题 4 分，共 20 分)

(1) $1-\sqrt{2}$　　(2) $-\dfrac{3}{2}$　　(3) $\dfrac{1}{4}\pi R^4\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(r^2\sin^2\varphi)r^2\mathrm{d}r$　　(5) $\dfrac{11}{24}\mathrm{e}$.

二、选择题(每小题 4 分，共 20 分)

(6) (A)　(7) (C)　(8) (B)　(9) (B)　(10) (D)

三、计算、证明题(每小题 10 分，共 60 分)

(11) 记$u_n(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$,因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=x^2$,所以由比值法知，

当$x^2<1$即$|x|<1$时，级数收敛；当$x^2>1$即$|x|>1$时，级数发散.

于是可知幂级数的收敛半径$R=1$，即收敛区间为$(-1,1)$.

当$x=\pm1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$为交错级数，由莱布尼茨定理知级数收敛.

故幂级数的收敛域为$[-1,1]$.

令，记$S(x)$为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的和函数，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=x\cdot S_1(x),$$

其中$S_1'(x)=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1})'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+\cdots$

$=\dfrac{1}{1+x^2}$，$x\in[-1,1]$.

所以$S_1(x)=\int_0^x S_1'(t)\mathrm{d}t+S_1(0)=\int_0^x\dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+0=\arctan t\Big|_0^x=\arctan x.$

故$S(x)=xS_1(x)=x\arctan x$，$x\in[-1,1]$.

(12) 设球面$\sum: x^2+y^2+(z-3)^2=R^2$,其中$0<R<6$,

则$\sum$在定球内部部分的方程为$z=3-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,

从方程组$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3^2 \\ x^2+y^2+(z-3)^2=R^2 \end{cases}$中消去$z$,得两球面的交线在$xOy$平面上的投影为

$\begin{cases} x^2+y^2=(\frac{R}{6}\sqrt{4\times 3^2-R^2})^2 \\ z=0 \end{cases}$.

因此,球面$\sum$在定球内部的面积为

$$S(R)=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{R}{6}\sqrt{4\times 3^2-R^2}}\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\mathrm{d}r=2\pi R^2-\frac{\pi R^3}{3}$$

于是$S'(R)=\pi R(4-R)$,$S''(R)=4\pi-2\pi R$

令$S'(R)=0$,得$R=4$,而$S''(4)-4\pi<0$,故函数$S(R)$在$R=4$时取得最大值,且在定义域内仅有此唯一的极值,所以当$R=4$时,球面$\sum$在定球内部的面积最大.

(13) 由于区域D为一正方形,可以直接用对坐标曲线积分的计算方法计算.

(1)左边$=\int_0^{\pi}\pi\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{0}\pi\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\pi(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x$,

右边$=\int_0^{\pi}\pi\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{0}\pi\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\pi(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x$.

(2)由于$\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}\geq 2+\sin^2 x$,

$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\geq\frac{5}{2}\pi^2$.

(14) 作以原点为心,以$\varepsilon>0$为半径的小球面$\sum_\varepsilon$(取$\varepsilon>0$充分小,使$\sum_\varepsilon$在椭球面$\sum: 2x^2+2y^2+z^2=4$之内),且由曲面$\sum_\varepsilon$与$\sum$所围的区域记为Ω_1,小球面$\sum_\varepsilon$围成的球体记为Ω_ε,

则$I=\oiint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\oiint_{\Sigma-\Sigma_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\oiint_{\Sigma_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

由于$\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z}$在$\Omega_1$上连续,且$\Sigma-\Sigma_\varepsilon$取外侧,

根据高斯公式有$\oiint_{\Sigma-\Sigma_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\iiint_{\Omega_1}0\mathrm{d}v$,

又$\oiint_{\Sigma_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint_{\Sigma_\varepsilon}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi$,

故$I=0+4\pi=4\pi$.

(15)曲面$z=x^2+y^2+1$在点$(1,-1,3)$处的法向量为$\{2,-2,-1\}$.

切平面方程为$z=2x-2y-1$.

切平面与曲面$z=x^2+y^2$的交线$\begin{cases} z=2x-2y-1 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$在$xOy$平面上的投影曲线为

$\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2=1 \\ z=0 \end{cases}$，其所围区域设为$D$.

$$V=\iint\limits_D\left[(2x-2y-1)-\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left[1-(x-1)^2-(y+1)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令$\begin{cases} x=1+r\cos\theta \\ y=-1+r\sin\theta \end{cases}$，则$V=\iint\limits_D\left(1-r^2\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^1\left(1-r^2\right)r\mathrm{d}r=\dfrac{\pi}{2}$.

(16)

1) $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{\pi t^4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{4}{t^4}\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)t^2}{t^3}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)}{t}=\begin{cases} f'(0)，当f(0)=0时 \\ \infty，当f(0)\neq0时 \end{cases}$.

2)由$f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$的两边对$x$求导得$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

两边再对x求导得$f''(x)=-\sin x-f(x)$.即$f''(x)+f(x)=-\sin x$.

这是二阶常系数非齐次线性微分方程，初始条件$y|_{x=0}=f(0)=0,y'|_{x=0}=f'(0)=1$.

对应齐次方程通解为$Y=C_1\sin x+C_2\cos x$.

非齐次方程的特解可设为$y^*=x(a\sin x+b\cos x)$.用待定系数法求得$a=0,b=\dfrac{1}{2}$.

于是$y^*=\dfrac{x}{2}\cos x$.

非齐次方程的通解为$y=Y+y^*=C_1\sin x+C_2\cos x+\dfrac{x}{2}\cos x$

由初始条件定出$C_1=\dfrac{1}{2}$，$C_2=0$.

从而$f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{x}{2}\cos x$.