2014-2015 学年第二学期高等数学试题 (A)

一、填空题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）

1.以向量 $\vec{a}=\{8,4,3\}$，$\vec{b}=\{2,-2,1\}$ 为邻边所构成平行四边形的面积等于__________。

2. 设 $z=x^3 f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$, f 具有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$ ______。

3.二重积分 $I=\iint\limits_D\left(x^3\sin y+x^2y^2\right)dxdy=$____________，

其中 D 是由曲线 $y=x^2$，$y=4x^2$，$y=1$ 围成的区域。

4. 球面 $x^2+y^2+z^2=50$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的交线在点 $M(3,4,5)$ 处的切线方程为_____

5.已知 Σ 为平面 $2x+2y+z=6$ 在第一卦限中的部分，

则 $\iint\limits_{\Sigma}\left(2xy-2x^2-x+z\right)ds=$____________。

二、选择题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）

6．设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则级数____________。

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛； (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散；

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散； (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛。

7．函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 上处偏导数存在是 $f(x,y)$ 在该点处__________。

(A) 连续的充分条件； (B) 连续的必要条件；

(C) 可微的必要条件； (D) 可微的充分条件。

8．将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数为________。

(A) $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in[-1,1]$；

(B) $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in(-1,1)$；

(C) $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in[-1,1)$；

(D) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in[-1,1)$

9.设 $I=\oint_{L}\frac{xdx+ydy}{x^{2}+y^{2}}$，$L$ 是 xoy 平面上任一不包含原点的光滑封闭曲线，则 $I=$______。

(A) 0； (B) π； (C) 2π； (D) $\frac{\pi}{2}$

10．直线 $l_{1}:\begin{cases}x-y=0\\ z=0\end{cases}$ 与直线 $l_{2}:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$ 的距离为___。

(A) 1； (B) $\sqrt{\frac{19}{3}}$； (C) $\sqrt{\frac{1}{2}}$； (D) $\sqrt{\frac{19}{2}}$

三、(共 7 小题，共 60 分)

11.（8 分）在区间 $(-1,1)$ 内求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n+1}$ 的和函数。

12.（8 分）区域 Ω 是由球面 $x^{2}+y^{2}+z^{2}=2z$ 与圆锥面 $z=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ 围成的包含 z 轴的部分，计算三重积分 $I=\iiint_{\Omega}\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}dv.$。

13.（8 分）计算 $\int_{L}\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^{2}+y^{2}}$，

其中 L 是沿 $y=\pi\cos x$ 由 $A(\pi,-\pi)$ 到 $B(-\pi,-\pi)$ 的曲线段。

14.（8 分）计算曲面积分 $I=\oiint_{\Sigma}\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}\,(xdydz+ydzdx+zdxdy)$，

其中 Σ 为球面 $x^{2}+y^{2}+z^{2}=a^{2}$ 的外侧。

15.（8 分）已知函数 $z=u(u,v)e^{ax+by}$，且 $\frac{\partial^{2}u}{\partial x\partial y}=0$，确定常数 a 和 b，使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程：$\frac{\partial^{2}z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$。

16.（10 分）设有两条抛物线 $y=nx^{2}+\frac{1}{n}$ 和 $y=(n+1)x^{2}+\frac{1}{n+1}$，记它们交点的横坐标的绝对值为 a_{n}，（1）求这两条抛物线所围成的平面图形的面积 s_{n}，（2）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_{n}}{a_{n}}$ 的和。

17.（10 分）设函数 $f\left(x\right)$ 连续，Ω_t： $0\le z\le h,\quad x^2+y^2\le t^2$，

$$F\left(t\right)=\iiint\limits_{\Omega}\left[z^2+f\left(x^2+y^2\right)\right]dv$$，求 $\frac{dF\left(t\right)}{dt}$ 和 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F\left(t\right)}{t^2}$。