# 《离散数学》题库答案

**（代数结构部分）**

37、设 A={2,4,6}，A 上的二元运算*定义为：a*b=max{a,b}，则在独异点<A,*>中，单位元是(　　)，零元是(　　)。

38、设 A={3,6,9}，A 上的二元运算*定义为：a*b=min{a,b}，则在独异点<A,*>中，单位元是(　　)，零元是(　　)；

**（半群与群部分）**

39、设〈G,∗〉是一个群，则

(1)　若 a,b,x∈G，a∗x=b，则 x=(　　)；

(2)　若 a,b,x∈G，a∗x=a∗b，则 x=(　　)。

40、设 a 是 12 阶群的生成元，　则 $a^2$ 是(　　)阶元素，$a^3$ 是(　　)阶元素。

41、代数系统<G,*>是一个群，则 G 的等幂元是(　　　)。

42、设 a 是 10 阶群的生成元，　则 $a^4$ 是(　　)阶元素，$a^3$ 是(　　)阶元素。

43、群<G,*>的等幂元是(　　)，有(　　　)个。

44、素数阶群一定是(　　　　)群，它的生成元是(　　　　)。

45、设〈G,∗〉是一个群，a,b,c∈G，则

(1)　若 c∗a=b，则 c=(　　)；(2)　若 c∗a=b∗a，则 c=(　　)。

46、<H,,∗>是<G,,∗>的子群的充分必要条件是(　　　　)。

47、群＜A,*＞的等幂元有(　　　)个，是(　　　)，零元有(　　　)个。

48、在一个群〈G,∗〉中，若 G 中的元素 a 的阶是 k，则 $a^{-1}$ 的阶是(　　)。

49、在自然数集 N 上，下列哪种运算是可结合的？（　　）

(1) a*b=a-b　(2) a*b=max{a,b}　(3) a*b=a+2b　(4) a*b=|a-b|

50、任意一个具有 2 个或以上元的半群，它（　）。

(1) 不可能是群　(2) 不一定是群

(3) 一定是群　(4) 是交换群

51、6 阶有限群的任何子群一定不是（　）。

(1) 2 阶　(2) 3 阶　(3) 4 阶　(4) 6 阶

**（半群与群部分）**

19、求循环群 $C_{12}=\{e,a,a^2,\cdots,a^{11}\}$ 中 $H=\{e,a^4,a^8\}$ 的所有右陪集。

20、求下列置换的运算：

21、试求出 8 阶循环群的所有生成元和所有子群。

22、I 上的二元运算*定义为：$\forall a,b \in I$，$a*b=a+b-2$。试问<I,*>是循环群吗？解：

23、设<G,·>是群，$a\in G$。令 $H=\{x\in G \mid a\cdot x=x\cdot a\}$。试证：H 是 G 的子群。

24、证明：偶数阶群中阶为 2 的元素的个数一定是奇数。

25、证明：有限群中阶大于 2 的元素的个数一定是偶数。

26、试求$\langle N_6,+_6\rangle$中每个元素的阶。

27、设<G,·>是群，$a,b\in G$，$a\neq e$，且 $a^4\cdot b=b\cdot a^5$。试证 $a\cdot b\neq b\cdot a$。

28、I 上的二元运算*定义为：$\forall a,b\in I$，$a*b=a+b-2$。试证：<I,*>为群。

29、设<S,·>为半群，$a\in S$。令 $S_a=\{a^i \mid i\in I_+\}$。试证<$S_a$,·>是<S,·>的子半群。

30、单位元有惟一逆元。

31、设 e 和 0 是关于 A 上二元运算*的单位元和零元，如果$|A|>1$，则 $e\neq 0$。

32、证明在元素不少于两个的群中不存在零元。

33、证明在一个群中单位元是惟一的。

34、设 a 是一个群〈G，*〉的生成元，则 $a^{-1}$也是它的生成元。

35、在一个偶数阶群中一定存在一个 2 阶元素。

36、代数系统<G,*>是一个群，则 G 除单位元以外无其它等幂元。

37、设<G, *>是一个群，则对于 $a, b\in G$，必有唯一的 $x\in G$，使得 $a*x=b$。

38、设半群<S, ·>中消去律成立，则<S, ·>是可交换半群当且仅当 $\forall a, b\in S$，$(a\cdot b)^2=a^2\cdot b^2$。

39、设群<G, ⋆>除单位元外每个元素的阶均为 2，则<G, ⋆>是交换群。

40、设*是集合 A 上可结合的二元运算，且 $\forall a, b\in A$，若 $a*b=b*a$，则 $a=b$。试证明：

（1）$\forall a\in A, a*a=a$，即 a 是等幂元；

（2） $\forall a, b\in A, a*b*a=a$；

（3） $\forall a, b, c\in A, a*b*c=a*c$。

41、设<G, ·>是群，作 $f:G\rightarrow G, a\mapsto a^{-1}$。证明：f 是 G 的自同构 $\Leftrightarrow$ G 是交换群。

42、若群$\langle G, \star\rangle$的子群$\langle H, \star\rangle$满足$|G|=2|H|$，则$\langle H, \star\rangle$一定是群$\langle G, \star\rangle$的正规子群。

43、设 H 和 K 都 是 G 的不变子群。证明：$H\cap K$ 也是 G 的不变子群。

44、设群 G 的中心为 C（G）$=\{a\in G \mid \forall x\in G, a\cdot x=x\cdot a\}$。证明 C（G）是 G 的不变子群。

45、设$\langle G, \cdot\rangle$是没有非平凡子群的有限群。试证：G 是平凡群或质数阶的循环群。

46、设 H 和 K 都是 G 的有限子群，且$|H|$与$|K|$互质。试证：$H\cap K=\{e\}$。

47、素数阶循环群的每个非单位元都是生成元。

48、若$\langle S, \bullet\rangle$是可交换独异点，T 为 S 中所有等幂元的集合，则$\langle T, \bullet\rangle$是$\langle S, \bullet\rangle$的子独异点。

49、设<G, ●>是群，且 a∈G 的阶为 n，k∈I，则 $|a^k|=\dfrac{n}{(k,n)}$，其中(k, n)为 k 和 n 的最大公因子。

50、设<G, ●>是有限群，|G|＝n，则∀a∈G，|a|≤n。

51、设 G＝(a)，若 G 为无限群，则 G 只有两个生成元 a 和 $a^{-1}$；

52、设 G＝(a)，{e}≠H≤G，$a^m$是 H 中 a 的最小正幂，则

（1） H＝($a^m$)；

（2） 若 G 为无限群，则 H 也是无限群；

53、设 G＝(a)，|G|＝n，则对于 n 的每一正因子 d，有且仅有一个 d 阶子群。因此 n 阶循环群的子群的个数恰为 n 的正因子数。

54、设 h 是从群<$G_1$, ∗ >到<$G_2$, ●>的群同态，G1 和 $G_2$ 的单位元分别为 $e_1$ 和 $e_2$，则

（1） $h(e_1)=e_2$；

（2） $\forall a\in G_1$，$h(a^{-1})=h(a)^{-1}$；

（3） 若 $H\le G_1$，则 $h(H)\le G_2$；

（4） 若 h 为单一同态，则 $\forall a\in G_1$，$|h(a)|=|a|$。

55、有限群 G 的每个元素的阶均能整除 G 的阶。

56、证明：在同构意义下，只有两个四阶群，且都是循环群。

57、在一个群$\langle G,*\rangle$中，若 G 中的元素 a 的阶是 k，即$|a|=k$，则$a^{-1}$的阶也是 k。

58、在一个群$\langle G,*\rangle$中，若 A 和 B 都是 G 的子群。若$A\cup B=G$，则 A=G 或 B=G。

59、设 e 是奇数阶交换群$\langle G,*\rangle$的单位元，则 G 的所有元素之积为 e。

60、设$S=Q\times Q$，Q 为有理数集合，*为 S 上的二元运算：对任意$(a,b)$，$(c,d)\in S$，有

$$(a,b)*(c,d)=(ac,ad+b),$$

求出 S 关于二元运算*的单位元，以及当$a\neq 0$时，$(a,b)$关于*的逆元。

61、设$\langle G,*\rangle$是一个群，H、K 是其子群。定义 G 上的关系 R：对任意$a,b\in G$，$aRb\Leftrightarrow$存在 $h\in H,k\in K$，使得$b=h*a*k$，则 R 是 G 上的等价关系。

62、设 H 是 G 的子群，则下列条件等价：

（1） H 是 G 的不变子群；

（2） $\forall a\in G$，$a\bullet H\bullet a^{-1}\subseteq H$;

（3） $\forall a\in G$，$a^{-1}\bullet H\bullet a\subseteq H$;

（4） $\forall a\in G$，$\forall h\in G$，$a\bullet h\bullet a^{-1}\subseteq H$。

63、在半群 $\langle G,*\rangle$ 中，若对 $\forall a,b\in G$，方程 $a*x=b$ 和 $y*a=b$ 都有惟一解，则 $\langle G,*\rangle$ 是一个群。

64、设 $\langle G，*\rangle$ 是群， H 和 K 都是 G 的子群，令 $HK=\{h*s \mid s\in K，h\in H\}$，$KH=\{s*h \mid s\in K,h\in H\}$，$\langle HK,*\rangle$，$\langle KH,*\rangle$ 是 G 的子群的充分必要条件是 $HK=KH$。

65、设 H 和 K 都 是 G 的不变子群。证明：HK 也是 G 的不变子群。

66、设 $\langle G,*\rangle$ 为群，$a,b,c\in G$。若 $a*b=c*b*a$，$a*c=c*a$，$b*c=c*b$，且 $a,b$ 的阶分别为 $m,n$，则 $c$ 的阶整除 $m$ 与 $n$ 的最大公因子 $(m,n)$。