离散2透题

1.从1-9不重复取3奇3偶，奇偶间隔排列，组合？

$A_5^3\ A_4^3\ C_2^1$

2.（x1+x2+……Xt）^{n}展开后有多少不同项？

C_{n+t-1}^{t-1}

3.将一些球装入5箱，若至少有一箱有6个，则至少有几个球？

4.有n(m-1)+1只鸟进n个巢，问至少又一个巢内至少有多少只鸟？

5.18本书给甲乙丙三人。甲乙至少3本至多10本，丙至少2本，求不同的分配方法。

6.求s={4个a，4个b，3个c，3个d}的7个的组合，求方法数

7.求 $X_1+X_2+X_3=1$ 的整数解个数，X1，X2、X3>-5

8.6 个人排周一到周六 6 天班，甲不周一，乙不周四，丙不周六，共多少种方式？

9.5 个 app 分给 4 个人，每人至少一个，有多少个不同方案

10.从正整数 1 到 2n 中任取 n+1 个数,证明其中必定存在一个数是另一个数的倍数

11.设*是集合 A 上可结合的二元运算，且 a b∈A，若 a*b=b*a，则 a=b,证明 ab∈A，则 a*b*a=a

2.在偶阶的有限群中，必存在 $a\neq e$，使得 $a^2=e$,其中 e 是群的单位元

3. 设 R 是实数集，$M=\{\langle a,b\rangle \mid a\ b\in R,\ a\neq 0\}$，定义 $\langle a,b\rangle$ 。$\langle c,d\rangle=\langle ac,ad+b\rangle$ 证明 M 对运算。构成群

4.设 $\langle G,*\rangle$ 是群，a $b\in G$，试证明必存在唯一的 y 使得 $y*b=a$

5. 证明：对于剩余环〈Zn，＋n，×n 〉，n 是素数当且仅当 Zn 中无零因子。

1. 设 G 是一个群, e 是 G 的单位元, H 是 G 的子群. 如下定义关系 R：

$\forall a_1, a_2 \in G, < a_1, a_2 > \in R \Leftrightarrow a_1 e a_2^{-1} \in H.$ 证明 R 是 G 上的等价关系.

2. ⟨G, ∗⟩是个群，x∈G，定义 G 中的运算“Δ”为 aΔb=a∗x∗b，对∀a, b∈G，证明⟨G, Δ⟩也是群。

3. ⟨G, ∗⟩是群，⟨A, ∗⟩, ⟨B, ∗⟩是其不同的子群，证明 AUB=G，则 A=G 或 B=G

4、f1，f2 是⟨A, Δ⟩到⟨B, ∗⟩的同态，设 g 是 A 到 B 的映射，使对∀a∈A 有 g（a）=f_1（a）∗f_2（a），证明如果⟨B, ∗⟩是可交换的半群 g 是 A 到 B 的同态。

5、$\langle G,*\rangle$是群，c={a|a∈G，且∀x∈G，a*X=X*a}证明 c 是 G 的子群

6、记“开”为 1，关为 0，反应电路规律的代数系统，$\langle (0,1),+,.\rangle$

其中如图

证明 $\langle (0,1),+,.\rangle$是环

+	0	1
0	0	1
1	1	0

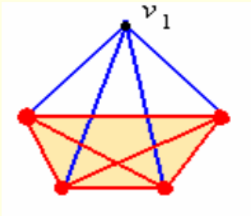
.	0	1
0	0	0
1	0	1

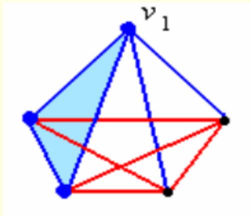
命题 2：

用红蓝两色涂色 K_9 的边，则或有一个红色 K_4，或有一个蓝色 K_3.

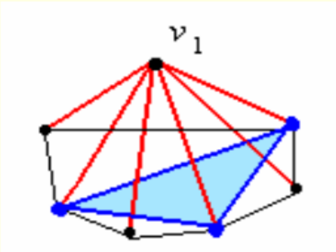
证：存在一个顶点关联4条蓝边或者6条红边.
否则蓝边数<4, 红边数<6，则蓝边总数至多 $\lfloor(3\times9)/2\rfloor=13$，红边总数至多 $\lfloor(5\times9)/2\rfloor=22$，总共35条边，与 K_9 边数为36矛盾.

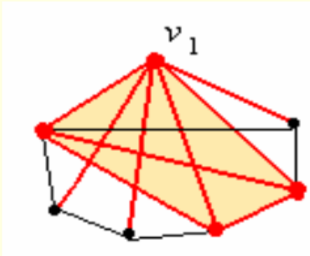
设 v_1 关联4条蓝边，若对应4个顶点没有蓝边，则构成红 K_4；有1条蓝边，则构成兰 K_3 .



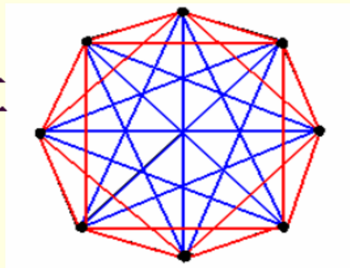


设 v_1 关联6条红边，对应6个顶点必有蓝 K_3 或红 K_3.





对于 K_8，存在一种涂色方案，既没有蓝色三角形，也没有红色完全四边形.
$R(3,4)=9$.



Example 3 证明 $(1-4x)^{-1/2}$ 是下列序列的普通生成函数。

$$\left(\binom{0}{0},\binom{2}{1},\binom{4}{2},\cdots,\binom{2n}{n},\cdots\right)$$

证明：由牛顿二项式定理有

$$(1-4x)^{-1/2}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{-1/2}{k}(-4x)^k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1/2(-1/2-1)(-1/2-2)\ldots(-1/2-k+1)}{k!}(-4x)^k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k(1\times3\times\ldots\times(2k-1))}{2^k\times k!}x^k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k k!(1\times3\times\ldots\times(2k-1))}{k!k!}x^k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2\times4\times\ldots\times(2k))(1\times3\times\ldots\times(2k-1))}{k!k!}x^k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{k!k!}x^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k}{k}x^k$$

$$=\binom{0}{0}+\binom{2}{1}x+\binom{4}{2}x^2+\ldots+\binom{2k}{k}x^k+\ldots$$

由定义知，$(1\text{-}4x)^{-1/2}$是序列$(C(0,0), C(2,1), C(4,2), \ldots, C(2n,n),\ldots)$的生成函数。

求1，3，5，7，9五个数字组成的n位数的个数，要求其中3，7出现的次数为偶数，其他1，5，9出现次数不加限制。

解:

设满足条件的r位的个数为a_r，则序列$a_1, a_2, \cdots$对应的指数型母函数为

$$G_e(x)=(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)^2(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)^3$$

由于

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$\therefore\quad 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

$$G_e(x)=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2e^{3x}=\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})e^{3x}$$

$$=\frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}+e^x)=\frac{1}{4}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^nx^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!})$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(5^n+2\cdot3^n+1)\frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{1}{4}(5^n+2\cdot3^n+1)$$

14. 假设在一个淘汰锦标赛中有 $n=2^k$ 个队，其中在第一轮有 $n/2$ 场比赛，$n/2=2^{k-1}$ 个赢的队进入第二轮比赛，依此进行。建立一个关于锦标赛的轮数的递推关系。

15. 在练习 14 的淘汰锦标赛中如果有 32 个队，需要进行多少轮比赛？

16. 求解练习 14 所描述的关于锦标赛轮数的递推关系。

14. If there is only one team, then no rounds are needed, so the base case is $R(1)=0$. Since it takes one round to cut the number of teams in half, we have $R(n)=1+R(n/2)$.

16. The solution of this recurrence relation for $n = 2^k$ is $R(2^k) = k$, for the same reason as in Exercise 10.

例：从 n 个不同物体中可重复选取 r 个物体，每个物体至少选一次的方法数为： $\binom{r-1}{n-1}$

$$f(x) = (x + x^2 + \cdots)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r-1}{n-1} x^r$$