离散数学复习纲要与见解

林子童（计数原理部分）

孙吉鹏（代数系统部分）

计数原理纲要适用于对上课知识有点印象但是公式和定理可能记混了的同学
有一少部分参考上课课件
对于时间比较充裕的同学，建议除了本资料以外多做做课本例题和老师画的习题

整理人：林子童

第 6 章 计数

6.1.计数基础

1）乘法法则、求和法则、树状图表示

2）减法法则（容斥原理） $|A1\cup A2|=|A1|+|A2|-|A1\cap A2|$

3）除法法则　例：4 人圆桌会议 对于非圆桌会议有 4！=24 种安排方式，而圆桌会议只要左右相邻的人相同就算是同种方式，故而共有 24/4=6 种方式

6.2.鸽巢原理（原理很简单，用起来需要费时间）

1）狭义鸽巢原理：如果有$\geq k+1$ 个物体放入 k 个盒子，至少有一个盒子中有两个或多个物体

例题：6.2.1 例 4

2）广义鸽巢原理：N 个物体放入 k 个盒子，至少一个盒子含有（上取整）N/个物体

例题：6.2.3 例 10

定理：每个由 n^2+1 个不同实数构成的序列都包含一个长为 n+1 的严格递增序列或严格递减序列。

例 13

6.3.排列与组合

相较高中符号发生变化，排列 A（n，r）变成 P（n，r）=n！/（n-r）;

组合 C（n，r）= $\binom{n}{r}$ =n！/r!(n-r)!;

例题：x1+x2+x3+x4=100，求正整数解的个数

隔板法，在 100 个数中设置 3 个隔板，将 100 个数分成四份，共有 C（99,3）种方法。

6.4.二项式系数和恒等式

1）二项式定理：

$$(x+y)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j$$

$$=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+\binom{n}{n}y^n$$

2）常用需要记下的：

（1+1）^{n}=$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$，(1-1)^n=$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$，（1+2）^{n}=$\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}=3^n$

3）帕斯卡恒等式：$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$理解方式：从 n+1 个物体中取 k 个物体，要么含有最后一个（那么只需要从 n 中取 k-1 个），要么不含有最后一个

范德蒙德恒等式$\binom{m+n}{r}=\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$，其推论$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$

4）$\binom{n+1}{r+1}=\sum_{j=r}^{n}\binom{j}{r}$理解方式：从 n+1 个中取 r+1 个，考虑最后取的一个，如果是第 n+1 个，则只需从 n 中取 r 个；如果是第 n 个，只需从 n-1 个中取 r 个，以此类推。

课后习题 28（1）使用范德蒙德恒等式

6.5.排列与组合的推广

1）有重复的组合，又叫 n 个相同的球放入 k 个不同的盒子里，或者从 k 种水果里选出 n 个水果，或者求 x1+x2+x3+x4=100 的非负数解。

仍旧使用隔板法，只不过现在是在 n 个物体和 k-1 个隔板中选择 k-1 个当隔板。

C（n+k-1,k-1）

2）定理：n 个物体中各种类型的物体分别有 n1,n2,n3…n_k个，那么它们的不同排列有：n!/(n1!n2!n3!...n_k!)种。

3）k 个盒子 n 个球，n≥k，每个盒子里面的球个数不限

①不同盒子不同球：n^k　每个球都有 k 种选择

另一种：n 个球放入 k 个盒子使得每个盒子有 n_k 个球：n！/(n1!n2!n3!...n_k!

②不同盒子相同球：C（n+k-1,k-1）

以下相机行事，可参考例 10，例 11

③相同盒子相同球：

④相同盒子不同球：

课后习题 58：

a）P（7,5）将 5 个球依次放入 7 个盒子中

b）1　　盒子没有号，且最多放一个球，只有一种

c）C（7,5）　选出 5 个盒子来放球

d）1

6.6 生成排列和组合

1）生成排列

首先了解排列算法工作原理，生成排列就是按照这个原理来的，生成排列，就是寻找全排列的下一个排列，生成组合同理。

我们对一个给定的排列寻找按字典序紧接的下一个排列，就是要尽可能保留长的共同前缀，而去修改不同的字符和后缀。我们给出这样一种方法：

1. 对给定的排列，从右到左扫描各个字符，如果这些字符从右到左是按字典序递增的，该排列就是最后一个，没有下一个排列。

2. 从右到左扫描各个字符，如果第*k*个字符不是按字典序递增的，下一个排列可以将第*k*个字符增加一位后修改得到。

3.将第*k*个字符增加一位后，可能与该字符前缀中的字符重复，那就再增加一位，直到与前缀中的字符不重。

4.若第*k*个字符增加一位后，仅与该字符后缀中的字符重复，那就与后缀中重复的字符互换。

5.执行第4步后，保留前缀和新的第*k*个字符，将后缀的字符按字典序重新排列就得到原排列紧接的排列。

例 按字典序求839647521的下一个排列，

解：最大的9-排列在最后，对于该排列，从右向左找出比右边数字小的第一个数4，将它加1(加后不与前缀的数字重复)变成5；

再对后缀从小到大重新排序1257，修改后缀中的重复数字5为4，接上前缀8396得到839651247，即是原排列839647521的下一个排列.

后面的生成排列依次是：

⇒ 8 3 9 6 5 1 2 7 4

⇒ 8 3 9 6 5 1 4 2 7

⇒ 8 3 9 6 5 1 4 7 2

2）生成组合

Example:字符集{1,2,3,4,5,6}取3元素的组合。

共有20个　123，124，125，126

134，135，136

145，146

156

234，235，236

245，246

256

345，346

356

456

2016-9-27

英文单词

counting　计数

the Pigeonhole principle　鸽巢原理

permutation　排列

combination　组合

the binomial theorem　二项式定理

Pascal’s identity　帕斯卡恒等式

Vandermonde’s identify　范德蒙德恒等式

generating 生成

第 8 章高级计数技术

8.1 递推关系的应用

这一节介绍如何列出递推关系，可以参考例 4

课后习题 27a）求 fn 的递推关系

如果第 n-1 个是绿色或者灰色，有 2f（n-2）种可能，那么第 n 个可以有三种颜色：3*2f（n-2）;

第 n-1 个是红色，有 f（n-1）-2f（n-2）种可能，此时最后一个只能是两种可能 2（f（n-1）-2f（n-2））;

综上，fn=2f（n-1）+2f（n-2）

8.2 求解线性递推关系

这一节介绍如何将上一节求出的递推关系求解。

1）常系数 k 阶线性齐次递推关系

线性：都是 ai 倍数之和；齐次：除了 ai 没有别的了；常系数：ci 都是常数

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$$

where $c_1, c_2, \ldots, c_k$ are real numbers , and $c_k \neq 0$.

求解步骤：

①获得特征方程 $r^k - c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} - \cdots - c_k = 0$，求解特征根 r1，r2，rk;

②设 $a_n=b_1r_1^n+b_2r_2^n+\ldots b_kr_k^n$，如果有重根，设 $a_n=(b_1+b_2n+\ldots b_kn^k)\,r_1^n$

③将初始条件代入②中，求解 bi，获得最终结果。

考试一般 k=2 或者 3。最复杂的也就是下面这种：

Example：求解下述递推关系的解。

$$\begin{cases} a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4} & (n \geq 4) \\ a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2 \end{cases}$$

特征方程：$r^4 - 8r^2 + 16=0$

特征方程的根：$r_1=2$，$r_2=-2$ 都是二重根

递推关系的解：$a_n=(b_1+b_2n)r_1^n+(b_3+b_4n)r_2^n$

2）常系数线性非齐次递推关系

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\ldots+c_ka_{n-k}+F(n)$$

where $c_1, c_2, \ldots c_k$ are real numbers and F(n) is a function not identically zero depending only on n.

其相伴其次递推关系为 $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ 其解为 $a_n^{(h)}$

而真正的解释 $a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$，而 $a_n^{(p)}$ 是特解

求解步骤：

①求相伴齐次递推关系特征方程的特征根

②根据 F（n）写出特解的形式，如 F（n）=ax+b,那么特解为 Ax+B

③特解代入原递推关系，求出特解。

④$a_n^{(h)}=b_1r_1^n+b_2r_2^n+\cdots b_kr_k^n=a_n- a_n^{(p)}$ 代入初值，求解

关于 F(n):

①F(n)=$An^k+Bn^{k-1}+\cdots C$, $a_n^{(p)}=a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots a_k$, 当有 m 重根的时候, $a_n^{(p)}=(a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots a_k)n^m$

②F(n)=β^n，β 不是特征根：$a_n^{(h)}=A\beta^n$，否则，$a_n^{(p)}=n^kA\beta^n$

③F(n)=$P_m(n)\beta^n$，$a_n^{(p)}=n^k(A_0n^m+A_1n^{m-1}+\cdots+A_m)\beta^n$. β 不是特征根，k；β 是特征 k 重根。

假设线性非齐次递推关系为:

$$a_n=6a_{n-1}-9a_{n-2}+F(n)$$

当 $F(n)=3^n$ $F(n)=n3^n$ $F(n)=n^2 2^n$

$F(n)=(n^2+1)3^n$

时，上述线性非齐次递推关系的特解是什么？

8.4 生成函数

1）形式幂级数 $G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$，又叫$\{a_k\}$的普通生成函数

指数幂级数 $f_e(x)=a_0+a_1\frac{x^1}{1!}+a_2\frac{x^2}{2!}+\cdots+a_n\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$

注意，在这里的 x 只是占位符号，不考虑其取值，重点在于 a_k

2）

定理 1：

Let $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ and $g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$. Then

$f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k$ and

$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{k}a_jb_{k-j})x^k$

定理 2 $\binom{\alpha}{k}=\begin{cases}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)/k! & if\ k>0\\ 1 & if\ k=0\end{cases}$

其中 k 可以大于 α，且 α 可以为负数、分数

常用生成函数：

① $f(x)=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x^1+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n$ 其中可以将 x 变换成任何形式，只要改变等号两边相应位置即可。后面的生成函数也是这样。

②f(x)= C（-n，r） $=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k=(1+x)^{-n}$

（1+x）$^{-n}$ 可以将上述的 x 变成-x 即可

③ $\frac{1}{(1-x)}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$,$(1-x)^{-2}$ 可以看做左式求导取反以后的生成函数

④ $e^x=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$

⑤ $\ln(1+x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$

3）**计数问题与生成函数**

排列问题用指数生成函数，组合问题用普通生成函数

（1）组合问题

(1) 从 n 个不同物体中选取 r 个物体，其方法数为 $(1+x)^n$ 的幂级数展开式中 x^r 的系数 C(n,r) 。

(2) 从 n 个不同物体中可重复选取 r 个物体，其方法数为 $(1+x+x^2+x^3+\ldots)^n$ 的幂级数展开式中 x^r 的系数。

对于上面的（2）：

$f(x)=(1+x+x^2+\cdots)^n=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^r$ 使用的公式是 f(x)= C（-n，r） $=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k=(1+x)^{-n}$

以及 $\frac{1}{(1-x)}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ ，这样就能轻松获得 x^r 的系数了

如果（2）中的限制条件有“每类元素至少选一个”，那么括号中变成 $f(x)=(x+x^2+\cdots)^n$，计算方式基本不变，最终结果为 $\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r-1}{n-1}x^r$

（2）排列问题

例： 求 1,3,5,7,9 五个数字组成 r 位数的个数。其中7,9 出现的次数为偶数，其它数字出现的次数不加限制。

排列问题用指数生成函数，其他计算方式保持不变。

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2$$
$$=(e^x)^3\cdot\left[\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right]^2$$
$$=\frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}+e^x)$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(5x)^k}{k!}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3x)^k}{k!}+\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

∴ x^r 系数 $\frac{1}{4r!}(5^r+2\times3^r+1)$

4）利用生成函数求解递推关系

利用生成函数求解递推关系的步骤:

（1）用 f(x)表示序列 $(a_0,a_1,a_2,\ldots)$ 的普通生成函数。即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

（2）利用递推关系将生成函数化为关于 f(x)的方程。

（3）求解出 f(x)。

（4）将f(x)表达式展开成幂级数形式，x^n 的系数就是递推关系的解。

对于常系数并且 F(n)是 0 以及 β^n 的，使用普通生成函数；其他的使用指数生成函数

普通生成函数：例 16（基础），例 17（升华）

指数生成函数：

$$\begin{cases} a_n = na_{n-1} + (-1)^n & n \ge 2 \\ a_0 = 1, a_1 = 0 \end{cases}$$

设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ 下面序列的指数生成函数

$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}[na_{n-1} + (-1)^n]\frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} na_{n-1}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!} + (1-x) - (1-x)$$

$$= 1 + x\sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!} - (1-x)$$

$$= 1 + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{x^n}{n!} - x + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!} - (1-x)$$

$$= x\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!} = xf(x) + e^{-x}$$

所以 $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{1}{1-x}e^{-x} = (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}\right]\frac{x^n}{n!}$$

其中最后的两个和相乘可以套用前面的公式

5）利用生成函数证明恒等式

例 18

8.5.容斥

容斥原理

Let $A_1, A_2, \ldots, A_n$ be finite sets.Then

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$
$$= \sum_{1\le i\le n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$
$$+ (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

8.5 题目都很初级，还是去看 8.6 长见识吧，可以直接略过所有例题（对证明有兴趣可以看看证明，其他例题就算了）

8.6 容斥原理的应用

容斥原理的另一种形式

求解一个集合中的某些元素，不具有 $p_1,p_1,p_3,\ldots p_n$ 中的任何一种性质

$$N(P_1', P_2', \ldots, P_n') = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$
$$= N - \sum_{i=1}^{n} N(P_i) + \sum_{1\le i<j\le n} N(P_i, P_j) - \sum_{1\le i<j<k\le n} N(P_i, P_j, P_k)$$
$$+ \cdots + (-1)^n N(P_1, P_2, \cdots P_n)$$

1）例 1，其中求解方式仍旧是使用隔板法。

定理：一个合数可以被一个不超过它平方根的素数整除。

2）映上函数的个数 （满射）

思想就是 Pi 代表后面的那个集合中 bi 不在函数值域中的情况

$$n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}C(n,n-1)1^m$$

例 2

3）错位排序

排列 n 个物体使它们都不在初始位置上。可以使用容斥原理进行证明。

$$D_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!})$$

英汉对照

recurrent relations 递推关系

Linear homogeneous recurrence relation of degree k 常系数 k 阶线性齐次递推关系

distinct root 特征根

multiple root 重根

Linear nonhomogeneous recurrence relations with constant coefficients 常系数线性非齐次递推关系

generating functions 生成函数

finite set 有穷集

inclusion-exclusion 容斥

onto function 映上函数

derangement 错位排序

代数系统部分偏重于理解与证明

此题纲包含了授课课件中所有关键概念的课本原定义和个人通俗理解，

适用于概念回忆加深期与知识串联期，建议结合课本证明与题目加强巩固！

整理人：孙吉鹏

第四章：代数系统

满足条件：非空集合+集合上有运算+运算封闭

A 上 n 元运算：A 的 n 次运算到 A 的映射

运算可以存在的各种性质：封闭性，交换律，结合律，(左右) 分配律，(左右) 消去律，吸收律 (如果对任意的 a,b∈A，都有 a*(a+b)=a，则称运算 * 关于运算 + 满足吸收律。)，等幂律

代数系统：假设 A 是一个非空集合，f1,f2,...,fn 是 A 上的运算(运算的元数可以是不相同的)，则称 A 在运算 f1,f2,...,fn 下构成一个代数系统，记 为:<A, f1,f2,...,fn>

子代数系统：<A,*> 是一个代数系统，S⊆A，如果 S 对* 是封闭的，则称 <S,*> 为 <A,*> 的子代数系统。

单位元（幺元)：和其他元素运算不改变其他元素的元素，相当于单位 1，分为 (左右) 单位元

零元：和其他元素运算结果都是该元素的元素，相当于乘法 0，分为 (左右) 零元。

逆元：和某一元素运算得到单位元，则该元素称为那个元素的逆元，类比乘法的倒数，加法的相反数，同样分为 (左右) 逆元

幂等元：元素和自身运算还为自身的元素

同态：本质上讲就是一种映射，这种映射使两个代数系统的元先运算后映射和先映射后运算结果相同。

(课本定义:设 <A,*> 和 <B,°> 是代数系统，f:A→B,如果 f 保持运算,即对 ∀x,y∈A,有 f(x*y)=f(x) ° f(y)。称 f 为代数系统 <A,*> 到 <B,°>的同态映射，简称同态。也

称为两代数系统同态。）

单同态：同态下，f 是单射，即一个 y 只对应一个 x。

满同态：同态下，f 是满射，即所有 y 都有 x 对应。

同构：同态下，f 是双射，即同时满足上述两个条件

自同态：f 是自映射

自同构：自同态下且 f 为双射。

同态同构性质：

（1） 两函数确定的代数系统是单同态，满同态，同构的，那么它们的复合函数确定的代数系统同样这样。

（2） 满同态保持结合律，交换律

（3） 满同态保持单位元，逆元，零元，幂等元

（4） 同构映射性质双向保持假设 f 是<A,*> 到 <B,°>的同构映射。 则 f-1 是 <B,° > 到 <A,*> 的同构映射。

同余关系：代数系统上按照同余关系划分的两个等价类之间的元素运算后得到的结果却成为同一等价类。类比于 Z5+中

[1]+[2] = [3]

（课本定义：假设 <A,*> 是一个代数系统，E 是 A 上 的等价关系。如果对∀x1,x2,y1,y2∈A，当 x1Ex2,y1Ey2 时 ， 必 有 (x1*y1)E(x2*y2) ， 则 称 E 是 A 上的同余关系。）

商代数：同余关系划分的代数系统

自然同态：代数系统自身到自身商代数的映射，类比于整数集到模 5 剩余类的映射。（原定义：对∀x∈A，有 g(x)=[x]，则 g 是 <A,*> 到 <A/E,° > 的满同态映射。）

一种特殊的同余关系：（课本解释：假设两个代数系统 <A,*> 与 <B,Δ> 同 态，它们之间一定存在映射 f:A→B。利用该 映射在 A 上建立一种关系 Ef，定义为:对 ∀x,y∈ A，Ef={<x,y>|f(x)=f(y)}，即 ∀x,y∈A，如果 f(x) = f(y)，就有 x Ef y。设 f 是代数系统 <A,*> 到 <B,Δ> 的同态映射，则 A 上的关系 Ef 是一个同 余关系。）

本质上就是满射到一起的元素之间是一个同余关系。

同态基本定理：（课本定义：设 f 是<A,*>到<B,Δ> 满同态映射，Ef 是由 f 确定的 A 上的同余关系，A/Ef 为 A 关于 Ef 的商代数。则 <A/Ef,° > 与 <B,Δ>同构。）

即 A 的一种由 f 确定的满同态和相应的 f 同余关系的商代数同构。

直积：（课本定义：设 <A,*> 和 <B,° > 为两个代数系 统，<A×B,Δ> 称为两代数系统的直积。其 中 A×B 是 A 和 B 的笛卡尔乘积，Δ 定义如 下:对任意的<x,y>,<u,v>∈A×B，<x,y>Δ<u,v>=<x*u,y° v>。）

定义在二元组的一种运算，使得结果等于对应位置元素在其代数系统内运算结果的二元组。

第五章：群论

半群：代数系统满足结合律

独异点：含幺半群

子半群：元素属于母半群且对相应运算也构成半群

群：代数系统满足结合律+单位元+任意元素有逆元

Abel 群：群+交换律

群的性质：

大于 1 阶的没有零元；消去律成立；单位元为唯一幂等元；同态对应单位元仍然为单位元；满同态后保持群的性质

群的证明：

1. 半群+左（右）单位元+任意元素有左（右）逆元
2. 有限半群+消去律

有限群：运算表每一行（列）都是全排列

Klein 群：非单位元运算结果不同于运算元素+可交换+同元素运算为单位元

子群：元素属于母群且对相应运算也构成群

子群性质：单位元与母群相同；字群中逆元也为母群中逆元

子群证明：

非空子集+运算封闭+任意元素逆元也存在

元素周期／阶：最小的让该元素幂次运算得到单位元的正整数

循环群：由 a 的幂次组成的群，a 称为生成元，用（a）代表这个群

循环群的性质：

1.（1）n 阶有限循环群同构于模 n 剩余类加法群

（2）无限群同构于整数加法群

2.循环群子群必为循环群

3.n 阶循环群若 m|n，则存在唯一一个 m 阶子群

置换：有限集 S 到自身的双射称为 S 的一个置换，S 含有几个元素就称为几次置换

n 次对称群：S 的所有置换和复合运算构成的群<Sn,°>

n 次置换群：<Sn,°>的任意子群

置换群性质：任意 n 阶群同构于一个 n 次置换群

左陪集（同余）关系：m │（-b）+ a，右陪集 m │a +（-b）

<G,*>是一个群，<H,*>是其子群，则 G 上模 H 左陪集关系 RH={<a,b>|a,b∈G,b(-1)*a∈H}，同理右陪集（同余）关系：R’H={<a,b>|a,b∈G,a*（b-1）∈H}左陪集性质：同理整数同余性质可得：(1) eH = H; (2) 对∀a,b∈H，aH = bH ⇔ b-1*a∈H (3) 对∀a∈H，aH = H ⇔ a∈H

左（右）商集：由关系 H 所确定的 G 上所有元素的左（右）陪集构成的集合称为 G 对 H 的左（右）商集。

左（右）商集性质：左右商集必等势

拉格朗日定理：有限群的子群的阶必整除母群的阶。

拉格朗日定理推论：

（1） 素数阶的群没有非平凡子群

（2） 素数阶的群是循环群

（3） n 阶有限群的任意元素至多 n 次幂后必回归为单位元

正规子群：<H,*> 是群 <G,*> 的子群，如果<H,*>的左右商集相等则<H,*> 是群 <G,*> 的正规子群。

正规子群的证明：

(1) 对∀a∈G, aH=Ha

(2) 对∀a∈G,h∈H,必存在 h’∈H,使 h*a=a*h’

(3) 对∀a∈G,h∈H, 有 a（-1）*h*a ∈H。 （最常用）

商群：正规子群对母群产生的划分。

商集为:G/H={aH|a∈G}={Ha|a∈G}

在商集 G/H 上定义运算 Δ：对∀aH，bH∈G/H，aH Δ bH =(a*b)H 则<G/H, Δ>构成商群。

子集的乘积： <G,*> 是一个群，A,B 是 G 的 子集 ，A，B 中元素相运算则得到子集乘积。集合{a*b| a∈A,b∈B}或者{ab| a∈A,b∈B} 称为 A,B 的乘积，记为 A*B 或 AB。

子集乘积的性质：

（1）满足结合率

（2）子群都为幂等元（HH=H）。

（3）设<H,*>是群<G,*>的正规子群，则对∀a,b∈G，aH*bH=(a*b)H

第六章：环、域

环的概念：Abel 群+半群+可分配

零因子：非第一运算单位元但可得单位元。

无零因子第二运算满足消去律，反之亦然。

整环：无零因子环+可交换+含有幺元

除环：含幺环+除去单位元第二运算为群

域：除环+可交换

域一定是整环，但整环不一定是域

有限整环必为域[1]

[1] 也希望一起用版权知识帮助身边的人？加入我们！JP_idea@163.com