概率统计试题 A

（注:对于相同题号的题目,不考数理统计的同学作带∗号的）

一、 填空题:

1.$P(A)=0.4, P(B)=0.3, P(A\cup B)=0.6$,则$P(A\overline{B})=$________.

2.设$X\sim N(1,2^2)$,且$P(X\geq k)=P(X<k)$,则常数$k=$________.

3.设X的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$, 则

X的密度函数$f(x)=$__________,$P(X>1)=$___________.

4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$, 则 $\xi=aX+bY$和 $\eta=aX-bY$ 的相关系数 $\rho_{\xi\eta}=$___________.

5.已知二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布如下:

$X\backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

当$\alpha=$_______,$\beta=$_____________时，X 和 Y 相互独立。

6．设 $X_1,\cdots,X_5$ 是取自正态总体 $X\sim N(0,1)$ 的简单样本，若

$a(X_1+X_2)^2+b(X_3-X_4)^2+X_5{}^2$ 服从自由度为 3 的 χ^2-分布，则

$a=$_______ , $b=$________ 。

6∗.设随机变量X的分布律为: $X\sim\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0.4 & 0.3 & 0.3\end{pmatrix}$，则

$E(3X^2+5)=$_________,$D(\sqrt{10}X-5)=$___________.

二、 选择题:

1.设$0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(A|B)+P(\overline{A}\,|\,\overline{B})=1$,则___________

(A) 事件 A 和 B 互不相容　　(B) 事件 A 和 B 互相对立

(C) 事件 A 和 B 互不独立　　(D) 事件 A 和 B 相互独立

2.设随机变量$X\sim N(\mu,2^2), Y=N(\mu,3^2)$，记$p_1=P\{X\geq\mu+2\}, p_2=P\{Y\leq\mu-3\}$,则_______________

(A) 对任意实数μ，有$p_1=p_2$　　(B) 对任意实数μ，有$p_1<p_2$

(C) 对任意实数μ，有$p_1>p_2$　　(D) 对μ的个别值，有$p_1=p_2$

3.设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim B(10,0.3), Y\sim B(10,0.4)$ ，则 $E(2X-Y)^2=$ ____________

(A) 12.6　(B) 14.8　(C) 15.2　(D) 18.9

4.已知随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$，则 $Y=5X-3$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 为______

(A) $F_X(5y-3)$　(B) $5F_X(y)$　(C) $F_X(\frac{y+3}{5})$　(D) $\frac{1}{5}F_X(y)+3$

5.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 σ^2 未知，检验假设 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$.则选取的统计量及其拒绝域分别是______.

(A) $T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\mathrm{S_n}}\sqrt{n-1},\quad |\mathrm{T}|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$　(B) $U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n},\quad |U|>u_{\frac{\alpha}{2}}$

(C) $T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\mathrm{S_n}}\sqrt{n-1},\quad |\mathrm{T}|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n)$　(D) $\chi^2=\frac{nS_n{}^2}{\sigma^2},\quad \chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

5*.设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 与 X_2 的分布函数.若 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 也是某一随机变量的分布函数，则_________

$(A)\quad a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$　$(B)\quad a=\frac{2}{3},b=\frac{2}{3}$

$(C)\quad a=-\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$　$(D)\quad a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$

三、 计算题：

1.有朋友自远方来，他乘火车、轮船、汽车、飞机的概率分别为0.3, 0.2, 0.1, 0.4. 如果乘火车、轮船、汽车来，迟到的概率分别为 $\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{12}$，而乘飞机则不会迟到. 问他迟到的概率是多少？如果他确实迟到了，那他乘火车来的概率是多少？

2.已知 X 的分布律如下,　求 $Y=X^2$ 的分布律.

X	-2	-1	0	1	2
P	a	$2a$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$2a$

3.设随机变量 X 的密度函数为　$f(x)=\begin{cases}\frac{A}{\sqrt{1-x^2}}, |x|<1\\ 0, \quad 其它\end{cases}$

求:(1)常数 A;　(2) $P(|X|\le\frac{1}{2})$;　(3) X 的分布函数.

4.设随机变量 X 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，求随机变量 $Y=-2\ln X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

5. 设二维随机变量 $(X，Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, 0<x<y \\ 0, 其他 \end{cases}$

(1) 求随机变量 Y 的边缘密度 $f_Y(y)$;

(2) 求概率 $P(X+Y\le 1)$

6.设随机变量X在区间(2,5)上服从均匀分布。现对X进行三次独立观测，则至少有两次观测值大于3的概率为多少？

7. 设有两台记录仪，每台无故障工作的时间服从参数为 5 的指数分布；首先开动一台，发生故障时停用而另一台自动开动，求两台记录仪无故障工作的总时间 T 的概率密度 $f(t)$，数学期望和方差。

8．设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\beta)=\begin{cases} \dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1, \\ 0, & x\le 1. \end{cases}$$

其中未知参数 $\beta>1, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，求：

(1) β 的矩估计量；(2) β 的极大似然估计量.

8*. 某保险公司由 10000 人参加保险，每人一年付 12 元保险费。设在一年内一个人出意外的概率为 0.006，出意外时保险公司付给家属 2500 元保险金。问保险公司亏本的概率是多少？（用 $\Phi(x)$ 表示）

9．生产一个零件所需时间（单位：秒） $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，观察 25 个零件的生产时间，得 $\overline{X}=5.5$, $S=1.73$，试求置信度为 0.95 的 μ 和 σ^2 的置信区间.

分布表有关参数参考值为： $t_{0.025}(24)=2.0639$, $t_{0.025}(25)=2.0595$,

$\chi^2{}_{0.025}(24)=39.364$, $\chi^2{}_{0.025}(25)=40.646$, $\chi^2{}_{0.975}(24)=12.401$, $\chi^2{}_{0.975}(25)=13.120$

9*.设随机变量(X,Y)的分布函数为：$F(x,y)=A(B+\arctan\dfrac{x}{3})(C+\arctan\dfrac{y}{4})$

求A,B,C及(X,Y)的联合密度函数.

A 答案

一.填空题（每空 2 分，共 18 分）

1.　0.3;　　**2.　1;**　　$3.\ f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$,　e^{-2};　　**4.** $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$**;**　　**5.** $\dfrac{2}{9},\dfrac{1}{9}$**;**　　**6.** $a=b=\dfrac{1}{2}$**;**　　6*.　13.4,　27.6**.**

二.选择题（每空 2 分，共 10 分）

1.(D);　　**2.(A);**　　**3.(B);**　　**4. (C);**　　**5.(A);**

5*.(A)

三.计算题（每题 8 分，共 72 分）

1. 全概率公式 $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A\mid B_i)$ **=0.15**

贝叶斯公式 $P(B_1\mid A)=0.5$

2. $a=\dfrac{1}{10}$

Y	**0**	**1**	**4**
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{10}$

3.(1) $\dfrac{1}{\pi}$**;**　(2) $\dfrac{1}{3}$

(3) 当 $x\le -1$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$

当 $-1<x\le 1$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{-1}0dt+\int_{-1}^{x}\frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x$

当 $x>1$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{-1}0dt+\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}dt+\int_{1}^{x}0dt=1$

$$\therefore F(x)=\begin{cases}0, & 当 x\le -1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin x, & 当 -1<x\le 1\\ 1, & 当 x>1\end{cases}$$

$$4. f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, y>0\\ 0, \quad y\le 0\end{cases}$$

$$5.(1)\ f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{y}\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

(2) $P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{\mathrm{x}}^{1-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=1+\mathrm{e}^{-1}-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

6. $p=P(X>3)=\dfrac{2}{3}$

$\mu\sim B(3,\dfrac{2}{3})$. 所求概率为$P\{\mu\ge 2\}=C_3^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)+C_3^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{20}{27}.$

7. $T=X_1+X_2$,

$\because X_i\sim e(5)$且独立

由卷积公式 $f(t)=\begin{cases}25te^{-5t}, t>0\\ 0, \quad t\le 0\end{cases}$

$\because EX_{\mathrm{i}}=\dfrac{1}{5}, DX_{\mathrm{i}}=\dfrac{1}{25}$

$\therefore ET=EX_1+EX_2=\dfrac{2}{5}, DT=DX_1+DX_2=\dfrac{2}{25}$

8.（1） $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\beta)dx=\int_1^{+\infty}x\cdot\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\dfrac{\beta}{\beta-1}$，

令 $\dfrac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$**，解得** β **的矩估计量为** $\hat{\beta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}.$

（2）似然函数为 $L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}, x_i>1(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, 其他\end{cases}$

当 $x_i>1(i=1,2,\cdots,n)$**时，** $\dfrac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=\dfrac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$**，令** $\dfrac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=0$**，**

可得 $\beta=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$，故 β 的最大似然估计量为 $\hat{\beta}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}.$

$8*.X\sim B(10000,0.006)$由中心极限定理$X\approx N(60,7.72^2)$,

亏本$P(X>48)\approx\Phi(1.55)$

9． **标准差：** $S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$ ，

解　由题意知 $n=25$, $\bar{X}=5.5$, $S=1.73$

由于方差 σ^2 **未知，故** μ **关于置信度 0.95 的置信区间为**

$$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_{\alpha/2}(n-1)\ ,\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_{\alpha/2}(n-1))$$

$$=(5.5-\frac{1.73}{\sqrt{25}}\times 2.0639\ ,\ 5.5+\frac{1.73}{\sqrt{25}}\times 2.0639\ )=(4.7858\ \ ,6.2141)$$

由于均值 μ **未知，故** σ^2 **的置信区间为**

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=\left(\frac{(25-1)\times 1.73^2}{\chi^2_{0.025}(24)},\frac{(25-1)\times 1.73^2}{\chi^2_{0.975}(24)}\right)$$

$$=\left(\frac{(25-1)\times 2.9929}{39.364},\frac{(25-1)\times 2.9929}{12.401}\right)=(1.8248\ ,5.7922)$$

$$9*A=1/\pi^2,B=\pi/2,C=\pi/2.f(x,y)=\frac{12}{\pi^2(9+x^2)(16+y^2)}$$

概率论与数理统计试卷 B

（注：试题序号相同的题，带※的题目为周二学时的班级做）

一、单项选择题满分 45 分

1．先后抛掷两枚均匀的正方体骰子（他们的六个面分别标有点数 1，2，3，4，5，6），骰子朝上的面的点数分别为 X,Y，则 $\log_{2X}^{Y}=1$ 的概率为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{5}{36}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{1}{2}$

2．某工人生产了三个零件，以 A_i 表示“他生产的第 i 个零件是合格品”（$i=1,2,3$），以下事件的表示式中错误的是（　　）

A. $A_1A_2A_3$ 表示“没有一个零件是废品”

B. $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$ 表示“至少有一个零件是废品”

C. $\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}$ 表示“仅有一个零件是废品”

D. $\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ 表示“至少有二个零件是废品”

3．甲、乙、丙三人各自独立的向一目标射击一次，三人的命中率分别是 0.5，0.6，0.7，则目标被击中的概率为（　　）

A. 0.94　　B. 0.92　　C. 0.95　　D. 0.90

4．$X\sim N(-1,\sigma^2)$ 且 $P\{-3\le X\le -1\}=0.4$，则 $P\{X\ge 1\}=$（　　）

A. 0.1　　B. 0.2　　C. 0.3　　D. 0.4

5．设随机变量 X_1，X_2 相互独立，且 $X_i\sim P(\lambda),(i=1,2)$，则 X_1+X_2 与 $2X_1$ 的关系是（　　）

A. 有相同的分布　B. 数学期望相等　C. 方差相等　D. 以上均不成立

6．设离散型随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.3	0.5	0.2

其分布函数为 $F(x)$，则 $F(3)=$（　　）

A. 0　　B. 0.3　　C. 0.8　　D. 1

7．A、B 为两事件，若 $P(A\cup B)=0.8, P(A)=0.2, P(\overline{B})=0.4$ 则（　　）

A. $P(B-A)=0.4$　B. $P(\overline{A}\,\overline{B})=0.32$　C. $P(\overline{A}\,\overline{B})=0.2$　D. $P(\overline{A}B)=0.48$

8. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 与 X_2 的分布函数，为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数，则（　　）

A. $a=\frac{2}{3},b=\frac{2}{3}$　B. $a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$　C. $a=-\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$　D. $a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$

9. 设两个随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布，$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=\frac{1}{2}$，

$P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，则下列各式中成立的是（　　）

A. $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$　　B. $P\{X=Y\}=1$

C. $P\{X+Y=0\}=\frac{1}{4}$　　D. $P\{XY=1\}=\frac{1}{4}$

10. 设随机变量 X 的方差为2，则根据切比雪夫不等式有估计

$P\{|X-EX|\geq 2\}\leq$（　　）

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{2}{3}$　D. 1

11. 设两个相互独立的随机变量 X 与 Y 的方差分别为 1 和 2，则随机变量 $3X$ -$2Y$ 的方差是（　　）

A.8　B.16　C.17　D. 28

12. 若 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的一个样本，则统计量

$$\frac{X_2^2+X_3^2+\ldots+X_n^2}{(n-1)X_1^2}\sim\quad(\quad)$$

A. $\chi^2(n)$　B. $\chi^2(n-1)$　C. $F(n,1)$　D. $F(n-1,1)$

※12. 某小组共 9 人，分得 1 张观看奥运会的入场券，组长将 1 张写有“得票”字样和 8 张写有“不得票”字样的纸签混合后让大家依次各抽一张，以决定谁得入场券，则（　　）

A.第一个抽签者得“得票”的概率最大　B.第五个抽签者得“得票”的概率最大
C.最后抽签者得“得票”的概率最大　D.每个抽签者得“得票”的概率相等

13. 下列结论中正确的是（　　）

A. 假设检验是以小概率原理为依据
B. 由一组样本值就能得出零假设是否真正正确
C. 假设检验的结果总是正确的
D. 对同一总体，用不同的样本，对同一统计假设进行检验，其结果是完全相同的。

※13. 设 $X\sim N(0,4)$，则 $P\{X<1\}$=（　　）

A. $\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$　B. $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{8}}dx$　C. $\int_0^1\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx$　D. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}$

14. 设总体 $X \sim N(\mu,1)$，其中 μ 为未知参数，X_1, X_2, X_3 为样本，下面四个关于 μ 的无偏估计中，采用有效性这一标准来衡量，最好的一个是（　　）

A. $\frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2$　　　　B. $\frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{4}X_3$

C. $\frac{1}{6}X_1 + \frac{5}{6}X_2$　　　　D. $\frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$

※14. 设随机变量 X 的密度函数为 $p(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0, A) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 则常数 $A =$（）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C.2　　D. 1

15. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 未知而 σ^2 已知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为样本，记

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，则 $(\overline{X} - U_{0.05}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + U_{0.05}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ 作为 μ 的置信区间，其置信水平为（　　）

A.0.975　　B.0.95　　C.0.9　　D. 0.05

※15. 设随机变量 X 服从二项分布，即 $X \sim B(n, p)$ 且 $EX = 3$，$p = \frac{1}{7}$，

则 $n =$（　　）

A.7　　B.14　　C.21　　D.49

二、本题满分 9 分

设某厂有甲、乙、丙三个车间生产同一种产品，已知各车间的产量分别占全厂产量的25%，35%，40%。并且各车间的次品率依次为 5%，4%，2%，现从该厂这批产品中任取一件，求：（1）这批产品的次品率;（2）若该件是次品，是甲车间生产的概率是多少。

三、本题满分 9 分

设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = A + B\arctan x, -\infty < x < +\infty$$

求：（1）常数 A 和 B；（2）X 落入（-1，1）的概率;（3）X 的密度函数 $f(x)$。

四、本题满分 10 分

设 (X,Y) 服从区域 $D:\{(x,y) \mid 0 \le y \le 1 - x^2\}$ 上的均匀分布，设区域 $D_1:\{(x,y) \mid y \ge x^2\}$。

（1）写出 (X,Y) 的联合密度函数;（2）求 X 和 Y 的边缘密度函数;

（3）求概率 $P\{(x,y) \in D_1\}$

五、本题满分 10 分

盒中有白球 a 个，红球 b 个，今从盒中任取一球，设

$$X=\begin{cases}1,\text{取白球}\\0,\text{取红球}\end{cases},\quad \mathrm{Y}=\begin{cases}1,\text{取白球}\\-1,\text{取红球}\end{cases}$$

求 X,Y 的相关系数。

六、本题满分 9 分

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta},0<x<1\\0,\quad\text{其它}\end{cases}$$

其中 $\theta>$ -1 是未知参数，$\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,\cdots,\mathrm{X}_n$ 是总体 X 的一组样本，试求 θ 的极大似然估计。

※六、本题满分 9 分

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x),-\infty<x<+\infty$，求 $Y=X^2$ 的概率密度。

七、本题满分 8 分

规定有强烈作用的药片平均重量为 0.5 毫克，抽取 121 片来检查，测得其平均重量 0.53 毫克。根据药厂提供的药片重量，经反复试验，确信药片重量服从标准方差 $\sigma=\sigma_0=0.11$ 毫克的正态分布。试在 $\alpha=0.01$ 下，检验 $H_0:\mu=0.5$ 对 $H_1:\mu\neq0.5$（$U_{0.99}=2.32,U_{0.995}=2.58$）。

※七、本题满分 8 分

设 O 是线段 AB 的中点，在 AB 上任取一点 M，求三条直线段 AM,MB,AO 构成三角形的概率。

2007年概率统计试题B答案

一、1.C　2.D　3.A　4.A　5.B　6.D　7.C　8.B　9.A　10.B　11.C　※11.C　12.D　※12.D　13.A　※13.A　14.D　※14.D　15.C　※15.C

二、解：

（1）设A_1,A_2,A_3表示产品分别由甲、乙、丙车间生产的，$B=$“次品”。则A_1,A_2,A_3构成完备组，且有

$$P(A_1)=0.25，P(A_2)=0.35，P(A_3)=0.4$$

$$P(B|A_1)=0.05，P(B|A_2)=0.04，P(B|A_3)=0.02$$

所以

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.0345$$

（2）由贝叶斯公式

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.25\times0.05}{0.0345}=0.362$$

三、解：

（1）由 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}(A+B\arctan x)=A-\frac{\pi}{2}B=0$

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}(A+B\arctan x)=A+\frac{\pi}{2}B=0$$

得 $A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{\pi}$。故 $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x$。

（2）$P\{X\in(-1,1)\}=F(1)-F(-1)=\frac{1}{2}$

（3）X 的密度函数 $f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\quad(-\infty<x<+\infty)$

四、解：

（1）因(X,Y)在D上服从均匀分布，则

$$S_D=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\frac{4}{3}$$

知(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D},0\le y\le 1-x^2\\0,其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{4},0\le y\le 1-x^2\\0，其它\end{cases}$$

（2）当 $x \in (-1,1)$ 时

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{1-x^2} \frac{3}{4} dy = \frac{3}{4}(1-x^2)$$

X 的边缘密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2), -1 < x < 1 \\ 0, 其它 \end{cases}$$

当 $y \in (0,1)$ 时

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} \frac{3}{4} dx = \frac{3}{2}\sqrt{1-y}$$

Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{1-y}, 0 < x < 1 \\ 0, 其它 \end{cases}$$

（3）设 D' 为 D 与 D_1 的交集，因 (X,Y) 在 D 上服从均匀分布，故

$$P\{(x,y) \in D_1\} = \frac{S_{D'}}{S_D} = \frac{\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1-x^2-x^2)dx}{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} 。$$

五、解：

$$P\{X=1\} = \frac{a}{a+b}，\quad P\{X=0\} = \frac{b}{a+b}，\quad EX = \frac{a}{a+b}，\quad EX^2 = \frac{a}{a+b}$$

而

$$P\{Y=1\} = \frac{a}{a+b}，\quad P\{Y=-1\} = \frac{b}{a+b}$$

有

$$EY = \frac{a}{a+b} - \frac{b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}，\quad EY^2 = 1$$

(X,Y) 的分布律为

X \ Y	-1	1
0	$\frac{b}{a+b}$	0
1	0	$\frac{a}{a+b}$

$$E(XY) = \frac{a}{a+b}$$

$$DX=\frac{ab}{a+b}, \quad DY=\frac{4ab}{(a+b)^2}$$

所以 $$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY=\frac{2ab}{(a+b)^2}$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=1$$

六、解：似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}[(\theta+1)x_i^{\theta}]=(\theta+1)^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta}$$

取对数得

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

求导

$$\frac{d\ln(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

得

$$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$$

由于

$$\frac{d^2\ln(\theta)}{d\theta^2}|_{\theta=\hat{\theta}}=-\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2<0$$

所以 $\ln L(\theta)$ 在 $\hat{\theta}$ 处取最大值，因而 $\hat{\theta}$ 是 θ 的极大似然估计。

※六、解：

$Y=X^2\geq 0$，故当 $y\leq 0, F_Y(y)=0$；当 $y>0$ 有

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X^2\leq y\}=P\{-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y}\}$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f_X(x)dx$$

于是 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})-f_X(-\sqrt{y})], & y>0\\ 0, & y\leq 0\end{cases}$$

七、解：

（1）U ——检验

（2）拒绝域：$|U| \geq U_{1-\frac{\alpha}{2}} = U_{0.995} = 2.58$

（3）统计量：$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$

（4）$U = \dfrac{0.53 - 0.5}{0.11}\sqrt{121} = 3$

因 $|U| = 3 > 2.58$，所以拒绝 H_0 接受 H_1。

※七、解：设 A =“构成三角形”，将线段 AB 的长设为 1，又设 M 点的坐标为 x，原点为 AB 的中心，则

$\Omega = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$， AM 、 MB 和 AO 的长度为 $x, 1-x, \dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases} x + (1-x) > \dfrac{1}{2} \\ x + \dfrac{1}{2} > 1 - x \\ (1-x) + \dfrac{1}{2} > x \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}$$

于是 $A = \{x \mid \dfrac{1}{4} < x < \dfrac{3}{4}\}$ 得 $P(A) = \dfrac{1}{2}$。