2012-2013 学年第二学期高等数学试题 (A)

一、填空题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）

1. 判断级数$\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$的敛散性____________。

2. 设 $u=x^2e^yz^3$，，其中 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ 所确定，则 $du\big|_{x=-1,y=0}=$______________。

3. 已知两直线的方程是$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}, L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$，则过$L_1$且平行于$L_2$的平面方程是____________。

4. 设 L 为从点 $A(-1,0)$ 到点 $B(3,0)$ 的上半个圆周 $(x-1)^2+y^2=2^2, y\geq 0$，则 $\int_L\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}=$______________。

5. 设曲面S是$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$的被平面$z=2$所截下的有限部分外侧面，则曲面积分 $\iint\limits_S zdS=$ ______。

二、选择题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分）

6．若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则下列结论不成立的是____________。

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$ 必收敛，　　　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 必收敛，

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 必收敛，　　　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}$ 必收敛。

7．已知直线L过点$M_0(-1,0,4)$，且与直线$L_1:\begin{cases}x+2y-z=0\\x+2y+2z+4=0\end{cases}$垂直，又与平面$\pi:3x-4y+z-10=0$平行，则$L$的方程为_______。

(A) $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{5}$；　　　　(B) $\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-4}{5}$；

(C) $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-4}{5}$；　　　　(D) $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-4}{-5}$

8．$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处__________。

(A) 极限不存在； (B) 极限存在但不连续； (C)连续但不可微； (D) 可微

9．设 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=1, z=1, z=0$ 所围成的闭区域，则

$\iiint\limits_{\Omega}\left[e^{z^3}\tan\left(x^2y^3\right)+3\right]dV=$__________。

(A) 0； (B) 3π； (C) π； (D) 3

10．设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2>0\right\}$，$l$ 是 D 内的任意一条逐段光滑的简单封闭曲线，

则必有_____。

(A) $\oint_l\dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}\neq 0$； (B) $\oint_l\dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}=0$；

(C) $\oint_l\dfrac{xy(xdy-ydx)}{x^4+y^4}\neq 0$； (D) $\oint_l\dfrac{xy(xdy-ydx)}{x^4+y^4}=0$

三、计算题（共 6 小题，每题 10 分，共 60 分）

11.（10 分）将函数 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数，并指出其成立范围，

并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ 的和。

12.（10 分）求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi:x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程，并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所得曲面的方程。

13.（10 分）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y+1,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=x+2y+3,\quad u(0,0)=1$，求 $u(x,y)$ 及 $u(x,y)$ 的极值，并求出是极大值还是极小值，说明理由。

14.（10 分）计算

（1）设 D 为曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=x$ 围成的两块区域，求 $\iint\limits_D\left[e^{x^2}+\sin(x+y)\right]d\sigma$；

（2）$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-(x^2+y^2)}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}dz$

15.（10 分）计算

（1）$\int_{L_1}\left(1+ye^x\right)dx+\left(x+e^x\right)dy$，其中 L_1 是沿椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的上半周从点 $A(a,0)$ 到点 $B(-a,0)$ 的弧段；

（2）$\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2-z\right)dxdy+\left(z^2-y\right)dzdx$，其中$\Sigma$为旋转抛物面$z=1-x^2-y^2$在$z\in\left[0,1\right]$部分的外侧。

16.（10分）

设$f\left(x,y,z\right)$为连续函数，S为曲面$z=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$介于$z=2$与$z=8$之间的上侧部分，求$\iint\limits_{S}\left[yf\left(x,y,z\right)+x\right]dydz+\left[xf\left(x,y,z\right)+y\right]dzdx+\left[2xyf\left(x,y,z\right)+z\right]dxdy$。