2011-2012 学年第二学期高等数学试题 (A)

一、填空题（共 4 小题，每题 4 分，共 16 分）

1. 积分$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$的值等于____________。

2. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和序列为$S_n=\dfrac{2n}{n+1}$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=$____________。

3. 设向量$\vec{x}$与向量$\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$平行，且满足方程$\vec{a}\cdot\vec{x}=7$，则$\vec{x}=$____________。

4. $\int_\Gamma z^2ds=$ ______，其中Γ是球面$x^2+y^2+z^2=R^2$与平面$x+y+z=0$的交线。

二、选择题（共 4 小题，每题 4 分，共 16 分）

1. 设$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数$\varphi$具有二阶连续导数，$\psi$具有一阶导数，则必有____________。

   (A) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$；　　(B) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$；

   (C) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$；　　(D) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$

2. 曲面$z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$平行于平面$2x+2y-z=0$的切平面方程为_______。

   (A) $2x+2y-z-3=0$；　　(B) $x+y-z-3=0$；

   (C) $x+3y-z-3=0$；　　(D) $2x+3y-2z-3=0$

3. 设D是由曲线$y=\sin x$与x轴上自$x=0$至$x=2\pi$的线段所围成的有界闭区域，$f(x,y)$在D上连续，积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$与

$(1)\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)dy,$

$(2)\int_0^{\pi}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)dy-\int_\pi^{2\pi}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)dy,$

$(3)\int_0^1dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx+\int_{-1}^0dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)dx,$

$(4)\int_0^1dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx+\int_{-1}^0dy\int_{\pi+\arcsin y}^{2\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$

相等的是____________。

(A) （1）与（2）；　(B) （2）与（3）；　(C) （3）与（4）；　(D) （4）与（1）

4. 下列命题正确的是________。

(A) 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$；

(B) 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，且当$n\to\infty$时，a_n与b_n是等价无穷小，则$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也收敛；

(C) 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$都收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$也收敛；

(D) 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$都收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$也收敛。

三、（16 分）

1. 将函数$f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$展开成$(x-2)$的幂级数。

2. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\left(z+2x+\dfrac{4}{3}y\right)ds$，其中$\Sigma$是平面$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$在第一卦限中的部分。

四、（14 分）

1. 求直线$L:\begin{cases}2x-y+z-1=0\\ x+y-z+1=0\end{cases}$在平面$\pi: x+2y-z=0$上的投影直线方程。

2.计算$I=\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3 dV$，其中$\Omega$是由曲面$z=xy$与平面$y=x, x=1, z=0$所围成。

五、（12 分）

1. 假设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，记$A=\int_0^1 f(x)dx$，

求$\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz$（结果用$A$表示）。

2. 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，求$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$。

六、（10 分）

已知L是第一象限中从点（0，0）沿圆周$x^2+y^2=2x$到点（2，0），再沿圆周$x^2+y^2=4$到点（0，2）的曲线段，计算曲线积分$I=\int_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$。

七、（10 分）

设$z=z(u,v)$具有二阶连续偏导数，且$z=z(x-2y,x+3y)$满足

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$$，求$z=z(u,v)$所满足的关系式。

八、（6 分）

设P为椭球面$S: x^2+y^2+z^2-yz=1$上的动点，若S在点P处的切平面与xoy面垂直，求点P的轨迹C，并计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\left(x+\sqrt{3}\right)\left|y-2z\right|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，其中$\Sigma$是椭球面$S$位于曲线$C$上方的部分。