历年概率论与数理统计试题分章整理

第 1 章

一、选择与填空

11 级

1、设 $P(A)=0.5$， $P(A\overline{B})=0.2$，则 $P(B|A)=$ $\underline{\quad \frac{3}{5} \quad}$。

1、设 A,B,C 为随机事件，则下列选项中一定正确的是 $\underline{\quad D \quad}$。

(A) 若 $P(A)=0$，则 A 为不可能事件

(B) 若 A 与 B 相互独立，则 A 与 B 互不相容

(C) 若 A 与 B 互不相容，则 $P(A)=1-P(B)$

(D) 若 $P(AB)\neq 0$，则 $P(BC|A)=P(B|A)P(C|BA)$

10 级

1. 若 A,B 为两个随机事件，则下列选项中正确的是 $\underline{\quad C \quad}$。

(A) $(A\cup B)-B=A$　　(B) $(A\cup B)-B=B$

(C) $\left[(A\cup B)-B\right]\subset A$　　(D) $\left[(A\cup B)-B\right]\supset A$

1. 某人向同一目标独立重复进行射击，每次射击命中的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好是第 2 次命中目标的概率为 $\underline{\quad 3p^2(1-p)^2 \quad}$。

2. 在 $[0,1]$ 中随机取数 x，在 $[1,2]$ 中随机取数 y，则事件 $\left\{x+y\geq\frac{3}{2}\right\}$ 的概率为 $\underline{\quad \frac{7}{8} \quad}$。

09 级

1. 10 件产品中有 8 件正品，2 件次品，任选两件产品，则恰有一件为次品的概率为 $\underline{\quad \frac{16}{45} \quad}$.

2. 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则事件{两数之和大于 $\frac{4}{5}$ }的概率为 $\underline{\quad \frac{17}{25} \quad}$.

1. 设 A, B 为两个随机事件，若事件 A, B 的概率满足 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$，且有等式 $P(A|B)=P(A|\bar{B})$ 成立，则事件 A,B $\underline{\quad C \quad}$.

(A) 互斥　　(B) 对立

(C) 相互独立　　(D) 不独立

08 级

1、某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而随意拨号，则拨号不超过三次而接通电话的概率为 $\underline{\quad B \quad}$。

(A) $\frac{1}{10}$　　(B) $\frac{3}{10}$　　(C) $\frac{9}{10}$　　(D) $\frac{1}{8}$

1、在区间 $[0, L]$ 之间随机地投两点，则两点间距离小于 $\frac{L}{2}$ 的概率为 $\underline{\quad \frac{3}{4} \quad}$。

07级

1、10 把钥匙中有 3 把能打开门锁，今任取两把钥匙，则打不开门锁的概率为 $\underline{\quad \frac{7}{15} \quad}$。

2、在区间 $(0,1)$ 之间随机地取两个数，则事件{两数的最大值大于 $\frac{2}{3}$ }发生的概率为 $\underline{\quad \frac{5}{9} \quad}$。

二、计算与应用

11 级

有两个盒子，第一个盒子装有 2 个红球 1 个黑球，第二个盒子装有 2 个红球 2 个黑球，现从这两个盒子中各任取一球放在一起，再从中任取一球。

（1）求这个球是红球的概率；

（2）重复上述过程 10 次，记 X 表示出现取出的球为红球的次数，求 $E(X^2)$。

解答：（1）令事件 $A=$ {取得一个红球}，事件 $B_i=$ {从第 i 个盒子中取得一个红球}，$i=1,2$，于是

$$P(B_1B_2)=\frac{2\times 2}{3\times 4}=\frac{1}{3},\quad P(A|B_1B_2)=1$$

$$P(B_1\bar{B}_2)=\frac{2\times 2}{3\times 4}=\frac{1}{3},\quad P(A|B_1\bar{B}_2)=\frac{1}{2}$$

$$P(\bar{B}_1B_2)=\frac{1\times 2}{3\times 4}=\frac{1}{6},\quad P(A|\bar{B}_1B_2)=\frac{1}{2}$$

$$P(\bar{B}_1\bar{B}_2)=\frac{1\times 2}{3\times 4}=\frac{1}{6},\quad P(A|\bar{B}_1\bar{B}_2)=0$$

由全概率公式有

$$P(A)=P(B_1B_2)P(A|B_1B_2)+P(B_1\bar{B}_2)P(A|B_1\bar{B}_2)+P(\bar{B}_1B_2)P(A|\bar{B}_1B_2)+P(\bar{B}_1\bar{B}_2)P(A|\bar{B}_1\bar{B}_2)$$

$$=\frac{7}{12}$$ ……………………………………………………………………...4 分

（2）$X\sim B(10,\frac{7}{12})$ $E(X)=10\times\frac{7}{12}=\frac{35}{6}$ $D(X)=10\times\frac{7}{12}\times\frac{5}{12}=\frac{175}{72}$

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\frac{875}{24}$$ ……………………………………….4 分

10 级

1. 已知 A,B 为两个随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{3}{5}$，$P(B|A)=\frac{4}{5}$，求：

（1）$P(A\cup B)$；（2）$P(A-B)$；（3）$P[\bar{B}|(A\cup B)]$。

解答：（1）$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$ ………2 分

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{7}{10}$ ………2 分

（2）$P(A-B)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$ ………2 分

（3）方法 1：$P[\bar{B}|(A\cup B)]=1-P[B|(A\cup B)]=1-\frac{P(B)}{P(A\cup B)}=1-\frac{6}{7}=\frac{1}{7}$ ………2 分

方法 2：$P[\bar{B}|(A\cup B)]=\frac{P[(\bar{B}A)\cup(\bar{B}B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P(A-B)}{P(A\cup B)}=\frac{1}{7}$ ………2 分

09 级

1. 设 A,B 为两个随机事件，且有 $P(\bar{A})=0.4, P(B)=0.4, P(\bar{B}|A)=0.5$，计算：

（1）$P(A)$；（2）$P(AB)$；（3）$P\left(\bar{B}|(A\cup B)\right)$.

解答：（1）$P(A)=1-P(\bar{A})=0.6$； ……1 分

（2）$P(\bar{B}|A)=1-P(B|A)=1-\frac{P(AB)}{P(A)}=0.5$，故 $P(AB)=0.3$； ……2 分

（3）$P(\bar{B}|(A\cup B))=1-P(B|(A\cup B))=1-\frac{P(B(A\cup B))}{P(A\cup B)}$

$$=1-\frac{P(B)}{P(A)+P(B)-P(AB)}=\frac{3}{7}.$$ ……3 分

08 级

1、设 A,B 为两个事件，$P(\bar{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\bar{B})=0.5$，求：

（1）$P(A)$；（2）$P(AB)$；（3）$P\left(B\middle|(A\cup\bar{B})\right)$.

解答：$P(A)=1-P(\bar{A})=0.7$

$$P(AB)=P(A)-P(A\bar{B})=0.7-0.5=0.2$$

$$P(B|(A\cup\bar{B}))=\frac{P(B(A\cup\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})}=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})}$$

$$=\frac{0.2}{0.7+0.6-0.5}=\frac{1}{4}$$

07级

2、设 A,B,C 为三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=\frac{1}{6}$，

$P(BC)=\frac{1}{8}$，求：

（1）$P(C|A)$；（2）$P(C|\bar{B})$；（3）A,B,C 至少有一个发生的概率。

解答：（1）$P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{1}{2}$；

（2）$P(C|\bar{B})=\frac{P(C\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(C)-P(BC)}{1-P(B)}=\frac{5}{16}$；

（3）$P\{A,B,C\text{ 至少有一个发生}\}=P(A+B+C)$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-0-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+0=\frac{17}{24}\text{。}$$

第 2 章

一、选择与填空

11 级

2、设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$F(x)$ 为其分布函数，则对任意实数 a，有 $F(\mu+a)+F(\mu-a)=$ ___1___。

10 级

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且服从同一分布：$P\{X=k\}=P\{Y=k\}=\frac{k+1}{3}\quad(k=0,1)$，则概率 $P\{X=Y\}$ 的值为___$\frac{5}{9}$___。

08 级

2、设相互独立的两个随机变量 X，Y 的分布函数分别为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，则 $Z=\max(X,Y)$ 的分布函数是__C__。

(A) $F_Z(z)=\max\{F_X(z),F_Y(z)\}$　　(B) $F_Z(z)=\max\{|F_X(z)|,|F_Y(z)|\}$

(C) $F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)$　　(D) $F_Z(z)=F_X(x)F_Y(y)$

3、设随机变量 $X\sim N(1,4)$，$Y\sim N(0,1)$，且 X 与 Y 相互独立，则__A__。

(A) $X-2Y\sim N(1,8)$　　(B) $X-2Y\sim N(1,6)$

(C) $X-2Y\sim N(1,2)$　　(D) $X-2Y\sim N(1,1)$

07 级

1、已知随机变量 X 服从参数 $n=2$，$p=\frac{1}{3}$ 的二项分布，$F(x)$ 为 X 的分布函数，则 $F(1.5)=$ __D__。

$(A)\ \frac{1}{9}$　　　　$(B)\ \frac{4}{9}$　　　　$(C)\ \frac{5}{9}$　　　　$(D)\ \frac{8}{9}$

二、计算与应用

11 级

1、已知随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\ge 1.\end{cases}$$

求：（1） X 的分布函数 $F(x)$；　（2）概率 $P\left\{|x|<\frac{1}{2}\right\}$。

解答：（1） $F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

当 $x<-1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$ ……………………………………1 分

当 $-1\le x<1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{x}\frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{\pi}(\arcsin x+\frac{\pi}{2})$ ………...2 分

当 $x\ge 1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}dt=1$ ……………………………..1 分

综上，$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{\pi}(\arcsin x+\frac{\pi}{2}), & -1\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

（2） $P\left\{|X|<\frac{1}{2}\right\}=P\left\{-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right\}=F(\frac{1}{2})-F(-\frac{1}{2})$

$=\frac{1}{\pi}[\arcsin(\frac{1}{2})+\frac{\pi}{2}]-\frac{1}{\pi}[\arcsin(-\frac{1}{2})+\frac{\pi}{2}]=\frac{1}{3}$ ……………………………………….3 分

2、设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=X^3$ 的概率密度函数。

解法 1：由于 $Y=X^3$ 所以 $x=h(y)=\sqrt[3]{y}$， …...…………………………1 分

$f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)|=\begin{cases}2\sqrt[3]{y}\cdot\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ …………………..6 分

解法 2：$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^3\le y\}$

当 $y<0$ 时：$F_Y(y)=0$ …………………………………………………………1 分

当 $0\le y<1$ 时：$F_Y(y)=P\{X^3\le y\}=P\{X\le\sqrt[3]{y}\}=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{y}}f_X(x)dx=\int_{0}^{\sqrt[3]{y}}2xdx=y^{\frac{2}{3}}$ ….5 分

当 $y\ge 1$ 时：$F_Y(y)=1$ …………………………...………………………1 分

故 $f_Y(y)=F_Y{}'(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\mathrm{y}^{-\frac{1}{3}}, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

10 级

2. 已知连续型随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=Ce^{-|x|}\ (-\infty<x<+\infty)$，求：

（1）常数 C；（2）X 的分布函数 $F_X(x)$；（3）概率 $P\{1<X<3\}$。

解答：（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ ………1 分

$\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}Ce^{-|x|}dx=1\Rightarrow C=\dfrac{1}{2}$ ………1 分

（2）当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{2}e^{x}dx=\dfrac{1}{2}e^{x}$

当 $x\ge 0$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{0}\dfrac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{x}\dfrac{1}{2}e^{-x}dx=1-\dfrac{1}{2}e^{-x}$

故 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$ ………4 分

（3）$P\{1<X<3\}=F(3)-F(1)=\dfrac{1}{2}(e^{-1}-e^{-3})$ ………2 分

3. 设随机变量 X 在区间 $[0,2]$ 上服从均匀分布，求随机变量 $Y=X^2$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$。

答：$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\le x\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$ ………2 分

方法 1：$y=x^2$ 的反函数为 $x=\pm\sqrt{y}$，故

$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(\sqrt{y})\left|(\sqrt{y})'\right|+f_X(-\sqrt{y})\left|(-\sqrt{y})'\right|, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$ ………2 分

$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y}}=\dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & 0\le y\le 4\\ 0, & 其他\end{cases}$ ………4 分

方法 2：$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$ ………2 分

当 $y<0$ 时：$F_Y(y)=0$

当 $0\le y<4$ 时：

$F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f_X(x)dx=\int_{0}^{\sqrt{y}}\dfrac{1}{2}dx=\dfrac{1}{2}\sqrt{y}$ ………2 分

当 $y\ge 4$ 时：$F_Y(y)=1$

故 $f_Y(y)=F_Y{}'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & 0\le y<4\\ 0, & 其他\end{cases}$ ………2 分

09 级

2. 设有三个盒子，第一个盒装有 4 个红球，1 个黑球；第二个盒装有 3 个红球，2 个黑球；第三个盒装有 2 个红球，3 个黑球. 若任取一盒，从中任取 3 个球。

（1）已知取出的 3 个球中有 2 个红球，计算此 3 个球是取自第一箱的概率；

（2）以 X 表示所取到的红球数，求 X 的分布律;

（3）若 $Y=\sin\frac{\pi}{2}X$ ，求 Y 的分布律.

解答:（1）设 $B_i=$“取第 i 箱”$(i=1,2,3)$， $A=$“取出的 3 个球中有 2 个红球”，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{1}{3}\cdot\frac{C_4^2\cdot C_1^1}{C_5^3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{C_3^2\cdot C_2^1}{C_5^3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{C_2^2\cdot C_3^1}{C_5^3}=\frac{1}{2}$$

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1A)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{2}{5}.$$ ……2 分

（2） $P\{X=0\}=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{30}$，

$P\{X=1\}=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{C_3^1\cdot C_2^2}{C_5^3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，

$P\{X=2\}=P(A)=\frac{1}{2}$， $P\{X=3\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}-P\{X=2\}=\frac{1}{6}$，

因此， X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

……2 分

（3） $P\{Y=1\}=P\{X=3\}=\frac{1}{6}$， $P\{Y=1\}=P\{X=1\}=\frac{3}{10}$，

$P\{Y=0\}=P\{X=0\}+P\{X=2\}=\frac{8}{15}$，

因此，Y 的分布律为

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{3}{10}$

……2 分

3. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ a+bx^2, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

（1）求系数 a,b 的值及 X 的概率密度函数 $f_X(x)$；

（2）若随机变量 $Y=X^2$，求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解答:（1）由于连续型随机变量的分布函数 $F(x)$ 是连续函数，因此:

$\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=F(0)$， $\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=F(1)$，即得 $a=0, b=1$，

$$f_X(x)=F_X'(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$ ……3 分

（2）（方法 1）对任意实数 y，随机变量 Y 的分布函数为:

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$$

当 $y<0$ 时: $F_Y(y)=0$，

当 $y\ge 0$ 时: $F_Y(y)=P\{\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$，

当$0 \le y < 1$时：$F_Y(y) = \left(\sqrt{y}\right)^2 - 0 = y$，

当$y \ge 1$时：$F_Y(y) = 1 - 0 = 1$

于是，$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$. ……3 分

(方法 2)

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\sqrt{y})\left|(\sqrt{y})'\right| + f_X(-\sqrt{y})\left|(-\sqrt{y})'\right|, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\sqrt{y} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{y}} + 0, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < y < 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$ ……3 分

08 级

2、已知连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ cx^3, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases},$$

求：（1）常数 c；（2）X 的概率密度函数；（3）概率 $P\{-1 < X < \frac{1}{2}\}$。

解答：（1）连续型随机变量的分布函数为连续函数，故$c = 1$；

（2）$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$；

（3）$P\{-1 < X < \frac{1}{2}\} = F(\frac{1}{2}) - F(-1) = \frac{1}{8}$。

3、设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，求随机变量$Y = X^2$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$。

解答：$f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，$y = x^2$ 的反函数为$x = \sqrt{y}$ 和 $x = -\sqrt{y}$，因此

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\sqrt{y})\left|(\sqrt{y})'\right| + f_X(-\sqrt{y})\left|(-\sqrt{y})'\right|, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases} \qquad = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

07 级

2、已知连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ a + b\arcsin x, & -1 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases},$$

求（1）常数a和b；（2）X 的概率密度 $f(x)$；（3）概率 $P\{-2 < X < 0\}$。

解答：(1) 由于连续型随机变量的分布函数$F(x)$是连续函数，将-1和1代入$F(x)$，得到关于a和b的方程：

$$0=F(-1)=a-\frac{\pi}{2}b\text{，}\quad 0=F(1)=a+\frac{\pi}{2}b$$

解得：$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{\pi}$；

（2）$F(x)$对x求导，得X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1\\ 0, & |x|\ge 1\end{cases}$$

（3）$P\{-2<X<0\}=F(0)-F(-2)=\frac{1}{2}$。

3、设随机变量X在区间$(1,2)$上服从均匀分布，求$Y=e^{2X}$的概率密度$f_Y(y)$。

解答：（解法一）由题设知，X的概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}1 & 1<x<2\\ 0 & 其他\end{cases}$。

对任意实数y，随机变量Y的分布函数为：

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^{2X}\le y\}$$

当$y\le e^2$时：$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^{2X}\le y\}=0$；

当$e^2<y<e^4$时：

$$F_Y(y)=P\{e^{2X}\le y\}=P\{X\le\frac{1}{2}\ln y\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\ln y}f_X(x)dx=\int_{1}^{\frac{1}{2}\ln y}dx=\frac{1}{2}\ln y-1\text{；}$$

当$y\ge e^4$时：$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^{2X}\le y\}=1$，

故

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le e^2\\ \frac{1}{2}\ln y-1, & e^2<y<e^4\\ 1, & y\ge e^4\end{cases}$$

于是，

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{2y}, & e^2<y<e^4\\ 0, & 其他\end{cases}\text{。}$$

(解法二) $f_Y(y)=\begin{cases}f_X(\frac{1}{2}\ln y)\left|(\frac{1}{2}\ln y)'\right|, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

$=\begin{cases}1\cdot\frac{1}{2y}, & 1<\frac{1}{2}\ln y<2\\ 0, & 其他\end{cases}\quad=\begin{cases}\frac{1}{2y}, & e^2<y<e^4\\ 0, & 其他\end{cases}$

第 3 章

一、选择与填空

11 级

3、设随机变量X与Y相互独立，X在区间$[0,3]$上服从均匀分布，Y服从参数为2的指数分布，则概率$P\{\min(X,Y)>1\}=$ $\underline{\quad\frac{2}{3e^2}\quad}$。

2、设随机变量(X,Y)服从二维正态分布，且X与Y不相关，$f_X(x)$、$f_Y(y)$分别为X、Y的概率

密度，则在 $Y=y$ 条件下， X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为___A___。

(A) $f_X(x)$　　(B) $f_Y(y)$

(C) $f_X(x)f_Y(y)$　　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

10 级

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布，则 $\min(X,Y)$ 服从___B___。

(A) 参数为 λ 的指数分布　　(B) 参数为 2λ 的指数分布

(C) 参数为 $\dfrac{\lambda}{2}$ 的指数分布　　(D) $(0,\lambda)$ 上的均匀分布

二、计算与应用

11 级

3、设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	-1	0	1
-1	0	$1/4$	0
0	$1/4$	0	$1/4$
1	0	$1/4$	0

（1）求概率 $P\{|X|>|Y|\}$；

（2）求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}，并讨论 X 与 Y 的相关性，独立性。

解答：（1） $P\{|X|>|Y|\}=P\{X=-1,Y=0\}+P\{X=1,Y=0\}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$ ….3 分

（2） $EX=0,EY=0,E(XY)=0$，故 $\operatorname{cov}(X,Y)=0,\rho_{XY}=0$。

因 $\rho_{XY}=0$，故 X 与 Y 不相关。 ………………………………………2 分

由联合分布律显然 $P_{ij}\neq P_{i\cdot}\cdot P_{\cdot j}$，所以 X 与 Y 不独立。 …………………2 分

1、设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Axy, & 0<y<x<1,\\ 0\ , & 其他.\end{cases}$$

求：（1）常数 A；

（2） (X,Y) 的边缘概率密度函数 $f_Y(y)$；

（3）在 $Y=y$ 的条件下， X 的条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$；

（4）条件概率 $P\{X<\dfrac{2}{3}\Big|Y=\dfrac{1}{2}\}$。

解答：（1） $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$ ……………………………………….....1 分

$\Rightarrow\int_0^1 dx\int_0^x Axydy=1\Rightarrow A=8$ ………………………………………………....2 分

（2） $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 8xydx=4y(1-y^2), & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ ……...................3 分

（3）当$0<y<1$时， $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2x}{1-y^2}, & y<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ ………………2 分

（4）$P\{X<\frac{2}{3}\Big|Y=\frac{1}{2}\}=\int_y^{\frac{2}{3}}\frac{2x}{1-y^2}dx\Big|_{y=\frac{1}{2}}=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}\frac{8x}{3}dx=\frac{7}{27}$ ………………………..2 分

10 级

1. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ax^2y, & x^2\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求：（1）常数A；

（2）(X,Y)的边缘概率密度函数$f_Y(y)$；

（3）在$Y=y$的条件下，X的条件概率密度函数$f_{X|Y}(x|y)$；

（4）条件概率$P\{X\le 0\Big|Y=\frac{1}{2}\}$。

解答：（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$ ………1 分

$\Rightarrow\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}Ax^2ydxdy=1\Rightarrow A=\frac{21}{4}$ ………2 分

（2）$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2ydx=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ ………3 分

（3）当$0<y<1$时， $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2y^{-\frac{3}{2}}, & -\sqrt{y}<x<\sqrt{y}\\ 0, & 其他\end{cases}$ ………2 分

（4）$P\{X\le 0\Big|Y=\frac{1}{2}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{3}{2}x^2y^{-\frac{3}{2}}dx\Big|_{y=\frac{1}{2}}=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0}\frac{3}{2}x^2 2\sqrt{2}dx=\frac{1}{2}$ ………2 分

09 级

1. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x-y}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

（1）求关于X的边缘密度函数$f_X(x)$； （2）试判断X与Y是否相互独立？

（3）计算$P\{X+Y<1\}$.

解答：（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$$=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x-y}dy, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases};$$ ……4 分

（2）与（1）类似，易知$f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$，满足$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，因此$X$与$Y$相互独立； ……4 分

（3）$P\{X+Y<1\}=\int_0^1dx\int_0^{1-x}\mathrm{e}^{-x-y}dy=1-2\mathrm{e}^{-1}$. ……2 分

某次抽样调查结果表明，考生的外语成绩X(百分制)近似服从正态分布$X\sim N(72,\sigma^2)$，并且分

数在 60 分至 84 分之间的考生人数占考生总数的 68.2%，试求考生的外语成绩在 96 分以上的概率.

X	0	1.0	2.0	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.841	0.977	0.999

解答：根据题意有，

$$P\{60 < X < 84\} = \Phi(\frac{12}{\sigma}) - \Phi(\frac{12}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{12}{\sigma}) - 1 = 68.2\%，$$ ……4 分

故 $\Phi(\frac{12}{\sigma}) = 0.841$，因此 $\sigma = 12$， ……2 分

$P\{X > 96\} = 1 - \Phi(\frac{24}{\sigma}) = 1 - \Phi(2) = 0.023$. ……2 分

08 级

1、设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

求：（1）（X，Y）的边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 和条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$；

（2）概率 $P\{Y > X\}$；

（3）随机变量 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$。

1、解答：（1） $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy, & -1 < x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1 < x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$,

当 $-1 < x < 1$ 时： $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$;

（2） $P\{Y > X\} = \iint\limits_{y>x} f(x,y)dxdy = \frac{1}{2}$；

（3） $F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{\sqrt{X^2 + Y^2} \le z\}$

当 $z \le 0$ 时： $F_Z(z) = 0$；

当 $0 < z < 1$ 时： $F_Z(z) = \iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2} \le z} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2} \le z} \frac{1}{\pi} dxdy = \frac{1}{\pi} \cdot \pi z^2 = z^2$；

当 $z \ge 1$ 时： $F_Z(z) = 1$。

因此， $f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} 2z, & 0 < z < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$。

07 级

1、设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} Ax, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

求（1）常数 A；

（2）（X，Y）的边缘概率密度函数 $f_Y(y)$ 和条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$；

（3）概率 $P\{X + Y < 1\}$。

1．解答：（1） 由于$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$，

即$\int_0^1 dx\int_0^x Axdy=1$，推得$A=3$。

（2）$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 3xdx, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-y^2), & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

当$0<y<1$时：$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2x}{1-y^2}, & 0<y<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$；

（3）$P\{X+Y<1\}=\int_0^{\frac{1}{2}} dy\int_y^{1-y} 3xdx=\dfrac{1}{4}$。

第 4 章

一、选择与填空

11 级

3、将一枚质量均匀对称的硬币独立地重复掷n次，以X和Y分别表示正面向上和反面向上的次数，则X和Y的相关系数为__B__。

(A) 1　　　(B) -1

(C) 0　　　(D) 0.5

10 级

2. 设随机变量X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的泊松分布，且$P\{X=1\}=P\{X=2\}$，则$D(X+1)$的值为A。

(A) 2　　(B) 3　　(C) $\frac{1}{4}$　　(D) $\frac{5}{4}$

09 级

2. 设X和Y为独立同分布的随机变量，X的分布律为$P\{X=0\}=\frac{1}{4}$，$P\{X=1\}=\frac{3}{4}$，令随机变量$Z=\max(X,Y)$，则数学期望$E(Z)=$__D__.

(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{3}{4}$　　(C) $\frac{1}{16}$　　(D) $\frac{15}{16}$

08 级

2、设随机变量X服从参数为1的泊松分布，则$P\{X=E(X^2)\}=$__$\frac{1}{2e}$__。

3、设随机变量X和Y的相关系数为0.5，$E(X)=E(Y)=0$，$E(X^2)=E(Y^2)=2$，则$E[(X+Y)^2]=$6。

07 级

2、下面四个随机变量的分布中，期望最大，方差最小的是__B__。

(A) X服从正态分布$N(5,\frac{1}{2})$　　(B) Y服从均匀分布$U(5,7)$

(C) Z服从参数为$\frac{1}{6}$指数分布　　(D) T服从参数为3的泊松分布

3、若二维随机变量(X,Y)的相关系数$\rho_{XY}=0$，则以下结论正确的是__B__。

(A) X与Y相互独立　　(B) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

(C) X与Y互不相容　　(D) $D(XY)=D(X)\cdot D(Y)$

3、设随机变量X服从参数为λ的指数分布，则$P\{X>\sqrt{DX}\}=$___$\frac{1}{e}$___。

二、计算与应用

10 级

将 2 封信随机地投入 2 个邮筒，设随机变量 X，Y 分别表示投入第 1 个和第 2 个邮筒的信的数目，试求：

（1）(X,Y) 的联合分布；（2）X 的数学期望 $E(X)$ 及方差 $D(X)$；

（3）(X,Y) 的相关系数 ρ；（4）判断 X，Y 是否不相关. 是否相互独立。

解答：（1）

Y \ X	0	1	2
0	0	0	1/4
1	0	1/2	0
2	1/4	0	0

………4 分

（2）X 与 Y 同分布，且 X 的分布为：

X	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

因此 $E(X)=1$，$E(X^2)=\frac{3}{2}$，$D(X)=\frac{1}{2}$ ………2 分

（3）方法 1：$E(Y)=1$，$D(Y)=\frac{1}{2}$，$E(XY)=\frac{1}{2}$，$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{1}{2}$

故 $\rho=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=-1$ ………2 分

方法 2：由于 $X+Y=2$，即 $Y=-X+2$，X 与 Y 存在线性关系，因此 $\rho=-1$。

………2 分

（4）相关，不独立 ………2 分

09 级

4. 设随机变量 X 与 Y 的相关系数 $\rho=1/4$，$D(X)=D(Y)=1$，令 $U=X+Y$，$V=X+aY$，且 U 与 V 不相关，求常数 a.

方法 1）$\operatorname{cov}(U,V)=\operatorname{cov}(X+Y,X+aY)$

$=D(X)+aD(Y)+(a+1)\operatorname{cov}(X,Y)$

$=1+a+(a+1)\rho\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=\frac{5}{4}(a+1)$

由于 U 与 V 不相关，因此 $\operatorname{cov}(U,V)=0$， ……4 分

于是 $a=-1$. ……2 分

(方法 2) $E(UV)=E[(X+Y)(X+aY)]$

$$=1+[E(X)]^2+(a+1)[\frac{1}{4}+E(X)E(Y)]+a\{1+[E(Y)]^2\}$$

$E(U)E(V)=E(X+Y)E(X+aY)=[E(X)]^2+(a+1)E(X)E(Y)+a[E(Y)]^2$

则 $\operatorname{cov}(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\frac{5}{4}(a+1)$

由于 U 与 V 不相关，因此 $\operatorname{cov}(U,V)=0$， ……4 分

于是 $a=-1$. ……2 分

08 级

2、设随机变量 X_1 和 X_2 的分布律为

X_1	-1	0	1

X_2	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

并且 $P\{X_1X_2=0\}=1$。

（1）求 X_1， X_2 的数学期望以及方差；

（2）求 (X_1,X_2) 的联合分布律；

（3）求 X_1， X_2 的协方差；

（4）判断 X_1， X_2 是否不相关，是否独立。

解答：（1） $E(X_1)=0,\quad E(X_2)=\frac{1}{2},\quad D(X_1)=\frac{1}{2},\quad D(X_2)=\frac{1}{4}$；

（2）

X_2 \ X_1	-1	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0

（3） $\text{cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-EX_1\cdot EX_2=0$；

（4）由 $\text{cov}(X_1,X_2)=0$ 知 $\rho_{X_1X_2}=0$ 故 X_1,X_2 不相关；

又(X_1,X_2)联合分布律中不满足 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$，所以 X_1,X_2 不独立。

设某企业生产线上产品的合格率为 0.96，不合格品中只有 $\frac{3}{4}$ 的产品可进行再加工，且再加工的合格率为 0.8，其余均为废品。已知每件合格品可获利 80 元，每件废品亏损 20 元，为保证该企业每天平均利润不低于 2 万元，问该企业每天至少应生产多少产品？

解答：每件产品的合格率为 $0.96+0.04\cdot\frac{3}{4}\cdot 0.8=0.984$，不合格率为 0.016，设随机变量 X 表示生产每件产品的利润，则 X 的分布律为：

X	80	-20
p	0.984	0.016

每件产品的平均利润即 $E(X)=80\times 0.984+(-20)\times 0.016=78.4$，有 $\frac{20000}{78.4}\approx 255.1$，因此企业每天至少应生产 256 件产品。

07 级

2、设二维随机变量（ X,Y ）的概率分布为

X \ Y	0	1	$P\{X=x_i\}$
-1		0.64	
0	0.04		
$P\{Y=y_j\}$		0.8	1

（1）请将上表空格处填全；

（2）求 X， Y 的数学期望以及方差 EX 、 EY 、 DX 、 DY；

（3）求 X， Y 的协方差 $\text{cov}(X,Y)$ 以及相关系数 ρ_{XY}，并判断 X,Y 是否不相关，是否独立；

（4）记 $Z=X+Y$，求 Z 的概率分布，并求 $P\{X=Z\}$。

2. 解答：（1）

X \ Y	0	1	$P\{X=x_i\}$
-1	0.16	0.64	0.8
0	0.04	0.16	0.2

$P\{Y=y_j\}$	0.2	0.8	1

（2） $EX=-0.8,\quad EY=0.8$， $DX=0.16,\quad DY=0.16$；

（3） $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=-0.64-(-0.8)(0.8)=0$，

$\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0$，故 X,Y 不相关，

又(X,Y)联合分布律中满足 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$，所以 X,Y 也相互独立；

Z	-1	0	1
P	0.16	0.68	0.16

（4） $P\{X=Z\}=P\{Y=0\}=0.2$。

07 级

已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 2 件产品放入乙箱后，求：

(1) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率；

(2) 乙箱中次品件数的数学期望。

解答：（1）设 A_0，A_1，A_2 为从甲箱中取到了 0，1，2 个次品；

设 B 为从乙箱中任取一件次品，则

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{C_3^2}{C_6^2}\cdot 0+\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{C_3^2}{C_6^2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5};$$

（2）设 X 表示乙箱中次品件数，则 X 可能取 0，1，2，

$$P\{X=0\}=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5};\quad P\{X=1\}=\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{5};\quad P\{X=2\}=1-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$$

故 X 分布率为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

因此： $EX=0+\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}=1$。

三、证明

10 级

1. 设随机变量 X 与 Y 的相关系数为 ρ，且满足 $D(X)=D(Y)$，令 $U=X+Y$ ，$V=X-Y$，证明：U 与 V 不相关。

证明： $\operatorname{cov}(U,V)=\operatorname{cov}(X+Y,X-Y)=D(X)-D(Y)=0$ ………2 分

即 $\rho_{UV}=0$，故 U 与 V 不相关 ………2 分

08 级

证明在一次试验中，事件 A 发生的次数 X 的方差 $D(X)\le\dfrac{1}{4}$。

证明：在一次试验中，事件 A 发生的次数 X 为 1 或 0，设 $X=1$ 的概率为 p， $X=0$ 的概率为 $1-p$，则 X 的方差

$$D(X)=p(1-p)=\frac{1}{4}-(p-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{4}。$$

07 级

1、设 X 为连续型随机变量，且数学期望 $E(e^{X^2})$ 存在，证明：对于任意正数 ε，有 $P\{|X|\ge\varepsilon\}\le\dfrac{E(e^{X^2})}{e^{\varepsilon^2}}$。

证明： $P\left\{ |X| \ge \varepsilon \right\} = \int\limits_{|X|\ge\varepsilon} f_X(x)dx \le \int\limits_{|X|\ge\varepsilon} \frac{e^{x^2}}{e^{\varepsilon^2}} f_X(x)dx \le \frac{1}{e^{\varepsilon^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} f_X(x)dx = \frac{E(e^{X^2})}{e^{\varepsilon^2}}$ 。

第 5 章

一、选择与填空

11 级

4、设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，用契比雪夫不等式估计 $P\{-2 < X < 6\} \ge$ $\underline{\quad \frac{7}{8} \quad}$。

10 级

4. 设随机变量 X 的数学期望为 μ，方差为 σ^2，则由契比雪夫不等式可知概率 $P\left\{ |X-\mu| \ge 3\sigma \right\} \le$ $\underline{\quad \frac{1}{9} \quad}$。

09 级

3. 设随机变量 X 的方差为 25，则根据契比雪夫不等式 $P\{|X - E(X)| < 10\} \ge$ $\underline{\quad \frac{3}{4} \quad}$.

3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是独立同分布的随机变量序列，且服从参数为 λ $(\lambda > 0)$ 的泊松分布，记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，则必成立__B__.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\lambda\sqrt{n}} \le x \right\} = \Phi(x)$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{\lambda n}} \le x \right\} = \Phi(x)$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \le x \right\} = \Phi(x)$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{\sqrt{\lambda n}} \le x \right\} = \Phi(x)$

08 级

4、设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，且 $E(X) = \mu$，$D(X) = 8$，$\bar{X} = \frac{1}{10}\sum\limits_{i=1}^{10} X_i$，利用契比雪夫不等式估计 $P\{\mu - 4 < \bar{X} < \mu + 4\} \ge$ $\underline{\quad \frac{19}{20} \quad}$。

07 级

4、已知随机变量 X 的数学期望 $EX = 5$，方差 $DX = 4$，则由契比雪夫不等式可知概率 $P\{2 < X < 8\}$____C____。

(A) $\ge \frac{4}{9}$　　(B) $\le \frac{4}{9}$　　(C) $\ge \frac{5}{9}$　　(D) $\le \frac{5}{9}$

第 6 章

一、选择与填空

11 级

5、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的容量为 n 的简单随机样本，S^2 为样本方差，则 $E(S^2) =$ $\underline{\quad \sigma^2 \quad}$。

10 级

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 表示样本均值，S^2 表示样本方差，则下列选项中错误的是__B__。

(A) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$　　　(B) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n)$

(C) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$　　　(D) $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立

09 级

4. 设总体 X 服从二项分布 $B(n, p)$， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，则 $D(\bar{X})$ 为___$p(1-p)$____.

08 级

4、设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$（$n \geq 2$）为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则___D___。

(A) $n\bar{X} \sim N(0,1)$　　　(B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$

(C) $\dfrac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$　　　(D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$

07 级

4、设 (X_1, X_2, X_3, X_4) 是来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，若统计量 $Z = \dfrac{C(X_1 + X_2)}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}}$ 服从 t 分布，则常数 $C =$ ___2___。

三、证明

11 级 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，若 $\bar{X}$ 表示样本均值，S^2 表示样本方差，记 $Y = n(\dfrac{\bar{X}-\mu}{S})^2$，证明：$Y \sim F(1, n-1)$。

证明：由于 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，所以 $(\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})^2 = \dfrac{n}{\sigma^2}(\bar{X}-\mu)^2 \sim \chi^2(1)$。　………..2 分

又由于 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，且 $\bar{X}$ 与 S^2 独立。　……………………………...2 分

$(\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})^2$ 与 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 是独立的两个 χ^2 分布

故 $\dfrac{(\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})^2}{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/ n-1} = n(\dfrac{\bar{X}-\mu}{S})^2 \sim F(1, n-1)$。

10 级

2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本且 $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$，$\bar{X}$ 表示样本均值，S^2 表示样本方差，记 $T = \bar{X}^2 - \dfrac{1}{n}S^2$，证明：$E(T) = \mu^2$。

证明：$E(\bar{X}) = \mu, D(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}, E(S^2) = \sigma^2$　………2 分

$E(T) = E(\bar{X}^2 - \dfrac{1}{n}S^2) = D(\bar{X}) + (E\bar{X})^2 - \dfrac{1}{n}E(S^2) = \dfrac{\sigma^2}{n} + \mu^2 - \dfrac{1}{n}\sigma^2 = \mu^2$　………2 分

09 级

1. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_8$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{10}$ 为分别来自两个正态分布总体 $N(-1,2^2)$ 及 $N(2,5^2)$ 的简单随机样本，且相互独立， S_1^2 与 S_2^2 分别为两个样本方差，试证明：统计量$\frac{25S_1^2}{4S_2^2}$服从 $F(7,9)$ 分布.

证明：由于$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，故$\frac{7S_1^2}{4}\sim\chi^2(7)$，$\frac{9S_2^2}{25}\sim\chi^2(9)$， ……2 分

因此：$\dfrac{\frac{7S_1^2}{4}\Big/7}{\frac{9S_2^2}{25}\Big/9}\sim F(7,9)$，整理即得$\frac{25S_1^2}{4S_2^2}\sim F(7,9)$. ……2 分

08 级

1、设随机变量 X 服从 $t(n)$ 分布，求证：$\frac{1}{X^2}$服从 $F(n,1)$ 分布。

证明：设 $X=\frac{Y}{\sqrt{Z/n}}$，其中 $Y\sim N(0,1),\quad Z\sim\chi^2(n)$，

因此有， $Y^2\sim\chi^2(1)$，

故 $\frac{1}{X^2}=\frac{Z/n}{Y^2/1}\sim F(n\ ,1$

第 7 章

一、选择与填空

11 级

4、设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 已知，若已知样本容量和置信度 $1-\alpha$ 均不变，则对于不同的样本观测值，总体均值 μ 的置信区间的长度___C___。

(A) 变长 (B) 变短

(C) 不变 (D) 不能确定

10 级

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，建立总体 X 的数学期望 μ 的置信度为 0.95 的置信区间，则当样本容量为 16 时，置信区间的长度 $L=$___0.98___。(已知 $\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$)

09 级

5. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布， X_1,X_2,X_3 是来自总体 X 的简单随机样本，且统计量 $\hat{\lambda}=aX_1+\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{3}X_3$ 是 λ 的一个无偏估计量，则常数 $a=$___$\frac{1}{6}$___.

4. 设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自正态总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，其中 σ^2 已知，μ 为未知参数，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是___A___.

(A) $\left(\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (B) $\left(\overline{X}-0.975\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+0.975\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

(C) $\left(\overline{X}-1.28\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+1.28\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (D) $\left(\overline{X}-0.90\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+0.90\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

（其中 $\Phi\left(x\right)$ 为标准正态分布的分布函数，$\Phi\left(1.96\right)=0.975,\Phi\left(1.28\right)=0.900$ ）

08 级

5、设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$，从中随机地抽取 25 个样本，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区

间的长度 $L=$ ___0.784___。

(已知 $\Phi(1.96)=0.975, \Phi(1.645)=0.95$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数)

07 级

5、已知一批零件的长度 X（单位：cm）服从正态分布 $N(\mu,1)$，从中随机地抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40 (cm)，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为___（39.51，40.49）___。

(已知 $\Phi(1.96)=0.975, \Phi(1.645)=0.95$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数)

二、计算与应用

11 级

2、设总体 X 服从 $0-1$ 分布，分布律为

X	1	0
p	p	$1-p$

其中 p 为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自 X 的简单随机样本。

求：（1） p 的矩估计量 $\hat{p}_1$；

（2） p 的极大似然估计量 $\hat{p}_2$；

（3）判断 $\hat{p}_1$、 $\hat{p}_2$ 是否为 p 的无偏估计。

解答：（1） $EX=p=\bar{X}$，故 $\hat{p}_1=\bar{X}$。 ……………………………………4 分

（2）由于总体 X 分布律还可以表示为 $P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x}, x=0,1$

所以 $L(p)=P\{X_1=x_1\}P\{X_2=x_2\}\cdots P\{X_n=x_n\}$

$$=\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$ ……………………………………….2 分

$$\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln p+(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p)$$ …...…………………………………....1 分

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0$$

$$\hat{p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x}$$ 故极大似然估计量为 $\hat{p}_2=\bar{X}$ …………………………...…..1 分

（3）由于 $E(\bar{X})=E(X)=p$，所以 $\hat{p}_1$、 $\hat{p}_2$ 都是 p 的无偏估计。 …………...2 分

10 级

4. 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 θ $(0<\theta<\frac{1}{2})$ 是未知参数，利用总体 X 的如下样本值：3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3, 求：（1）θ 的矩估计值；（2）极大似然估计值。

解答：(1) $EX=3-4\theta=\bar{X}$ ………2 分

故 $\hat{\theta}=\frac{3-\bar{X}}{4}=\frac{3-2}{4}=\frac{1}{4}$ ………2 分

(2) $L(\theta)=P\{X_1=x_1\}P\{X_2=x_2\}\cdots P\{X_n=x_n\}$

$=\theta^2[2\theta(1-\theta)]^2\theta^2(1-2\theta)^4$ ………2 分

$\ln L(\theta)=4\ln\theta+2\ln 2\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=12\theta^2-14\theta+3=0$$

故 $\hat{\theta}=\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$ ………2 分

09 级

2. 已知总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，试求：

（1） θ 的矩估计量； （2） θ 的极大似然估计量.

解答：（1） $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot\theta x^{\theta-1}dx=\dfrac{\theta}{\theta+1}$，

令 $\dfrac{\theta}{\theta+1}=\overline{X}$， 解得 $\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$，即参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$； ……5 分

（2）极大似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\begin{cases}\theta^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta-1}, & 0\le x_i\le 1\quad (i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

当 $0\le x_i\le 1\quad (i=1,2,\cdots,n)$ 时，取对数得 $\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^n\ln x_i$，

对 θ 求导数，得 $\dfrac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^n\ln x_i=0$，解得 $\hat{\theta}=\dfrac{-n}{\sum_{i=1}^n\ln x_i}$，

于是 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{-n}{\sum_{i=1}^n\ln X_i}$. ……5 分

08 级

3、已知总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\beta\alpha^\beta x^{-\beta-1}, & x>\alpha\\ 0, & x\le\alpha\end{cases}$$

其中 $\alpha>0,\beta>1$ 为未知参数， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。求：

（1） 当 $\alpha=1$ 时， β 的矩估计量；

（2） 当 $\beta=2$ 时， α 的极大似然估计量。

解答：（1）当 $\alpha=1$ 时，总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\beta)=\begin{cases}\beta x^{-\beta-1}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_1^{+\infty}x\cdot\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1},$$

令 $\dfrac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$， 解得参数 β 的矩估计量为 $\hat{\beta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$；

（2）当 $\beta=2$ 时，总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\alpha)=\begin{cases}2\alpha^2x^{-3}, & x>\alpha\\ 0, & x\le\alpha\end{cases}$

极大似然函数为

$$L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\alpha)=\begin{cases}2^n\alpha^{2n}(x_1x_2\cdots x_n)^{-3}, & x_i>\alpha\\ 0, & x_i\le\alpha\end{cases}$$

为使$L(\alpha)$取最大值，只需在$x_i\ge\alpha$时，使$2^n\alpha^{2n}(x_1x_2\cdots x_n)^{-3}$取最大值，即$\alpha$取最大值，因此，$\alpha$的极大似然估计量为$\hat{\alpha}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$。

07 级

3、设随机变量X的概率密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta}{x^{\theta+1}}, & x>1,\\ 0, & x\le 1,\end{cases}$$

其中$\theta>1$为未知参数. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本,求θ的矩估计量以及极大似然估计量。

解答:（1）当$\alpha=1$时，X的概率密度为$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta}{x^{\theta+1}}, & x>1,\\ 0, & x\le 1,\end{cases}$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{1}^{+\infty}x\cdot\frac{\theta}{x^{\theta+1}}dx=\frac{\theta}{\theta-1},$$

令$\dfrac{\theta}{\theta-1}=\overline{X}$， 解得$\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$，即参数$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$;

（2）似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta+1}}, & x_i>1(i=1,2,\cdots,n)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当$x_i>1(i=1,2,\cdots,n)$时，取对数得$\ln L(\theta)=n\ln\theta-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，

对θ求导数，得 $\dfrac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，

解得 $\hat{\theta}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，

于是θ的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$。

07 级

2、设随机变量X的数学期望为μ，方差为σ^2，$\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$是来自总体$X$的简单随机样本，

证明：$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$是$\sigma^2$的无偏估计。

3. 证明：$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}-n\overline{X}^2\right)$

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}EX_i^{\,2}-nE\overline{X}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}[DX_i+(EX_i)^2]-n[D\overline{X}+(E\overline{X})^2]\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}[\sigma^2+(\mu)^2]-n[\frac{\sigma^2}{n}+(\mu)^2]\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}(n\sigma^2+n\mu^2-\sigma^2+n\mu^2)=\sigma^2$$

因此： $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 是 σ^2 的无偏估计。

第 8 章

一、选择与填空

11 级

5、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,2^2)$ 的简单随机样本，样本容量 $n=16$，样本均值为 $\bar{X}$，则在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设 $H_0:\mu=5;H_1:\mu\neq5$ 的拒绝域为___A___。(已知 $\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数)

(A) $\left\{\left|\bar{X}-5\right|\geq0.98\right\}$　　(B) $\left\{\left|\bar{X}-5\right|\leq0.98\right\}$

(C) $\left\{\left|\bar{X}-5\right|\geq0.82\right\}$　　(D) $\left\{\left|\bar{X}-5\right|\leq0.82\right\}$

10 级

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，若进行假设检验，当___D___时，一般采用统计量 $T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$。

(A) μ 已知，检验 $\sigma^2=\sigma_0^2$　　(B) μ 未知，检验 $\sigma^2=\sigma_0^2$

(C) σ^2 已知，检验 $\mu=\mu_0$　　(D) σ^2 未知，检验 $\mu=\mu_0$

09 级

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，现进行假设检验，当在以下__C__情形时，一般采用统计量 $T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$.

(A) μ 未知，检验 $\sigma^2=\sigma_0^2$　　(B) μ 已知，检验 $\sigma^2=\sigma_0^2$

(C) σ^2 未知，检验 $\mu=\mu_0$　　(D) σ^2 已知，检验 $\mu=\mu_0$

08 级

5、设正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的双边检验 $H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$，σ^2 已知，显著性水平为 α，则 H_0 的拒绝域为__B__。

(A) $\left|\overline{X}-\mu_0\right|>\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_\alpha$　　(B) $\left|\overline{X}-\mu_0\right|>\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}$

(C) $\left|\overline{X}-\mu_0\right|>\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$　　(D) $\left|\overline{X}-\mu_0\right|>\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

07 级

5、对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著水平0.05下接受 $H_0:\mu=\mu_0$，那么在显著水平0.01下，下列结论中正确的是__A__。

(A) 必接受 H_o　　(B) 可能接受，也可能拒绝 H_o

(C) 必拒绝 H_o　　(D) 不接受，也不拒绝 H_o

第 10 章

11 级

3、设随机过程 $X(t)=Rt+C,\ -\infty<t<+\infty$，其中 C 为常数，R 服从 $(0,1)$ 区间上的均匀分布。

（1）求$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$的均值函数和相关函数；

（2）求$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$的协方差函数、方差函数和均方值函数；

（3）判断$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$是否为平稳过程？

解答：（1）均值函数

$$m_X(t) = E[X(t)] = E[Rt + C] = tE(R) + C = \frac{t}{2} + C, \ -\infty < t < +\infty \quad \text{……....2 分}$$

相关函数：

$$\begin{aligned} R_X(s,t) &= E[X(s)X(t)] \\ &= E[(Rs+C)(Rt+C)] \\ &= stE(R^2) + (s+t)CE(R) + C^2 \\ &= \frac{1}{3}st + \frac{1}{2}C(s+t) + C^2, \ -\infty < s,t < +\infty \end{aligned} \quad \text{……………………...2 分}$$

（2）协方差函数：

$$\begin{aligned} C_X(s,t) &= R_X(s,t) - m_X(s)m_X(t) \\ &= \frac{1}{3}st + \frac{1}{2}C(s+t) + C^2 - (\frac{s}{2}+C)(\frac{t}{2}+C) = \frac{1}{12}st, \ -\infty < s,t < +\infty \end{aligned} \quad \text{…2 分}$$

方差函数：$D_X(t) = C_X(t,t) = \frac{1}{12}t^2, \quad -\infty < t < +\infty$ ……….…………………1 分

均方值函数：$\Phi_X(t) = R_X(t,t) = \frac{1}{3}t^2 + Ct + C^2, \quad -\infty < t < +\infty$ …………….…1 分

（3）因为（a）任意$t \in T, m_X(t) = \frac{t}{2} + C \neq$（常数）；

（b）任意$s,t \in T,\ R_X(s,t) = \frac{1}{3}st + \frac{1}{2}C(s+t) + C^2 \neq R_X(s-t)$，$-\infty < s,t < +\infty$

因此：$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$不是平稳过程。 ……………………………..………2 分

10 级

2. 设随机过程$X(t) = A + Bt, \ -\infty < t < +\infty$，其中$A$和$B$是相互独立的随机变量，且均值是 0，方差是 1。

（1）求$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$的均值函数和相关函数；

（2）求$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$的协方差函数. 方差函数和均方值函数；

（3）判断$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$是否为平稳过程，并说明理由。

09 级

3. 设随机过程$X(t) = a\cos(\omega t + \Theta), \quad -\infty < t < +\infty$，其中 a 和ω是常数，Θ是服从$[0, 2\pi]$上均匀分布的随机变量.

（1）求$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$的均值函数和相关函数；

（2）求$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$的协方差函数、方差函数和均方值函数；

（3）判断$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$是否为平稳过程？

解答：（1）由于Θ的概率密度函数为 $f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

于是均值函数

$$m_X(t) = E[X(t)] = E[a\cos(\omega t + \Theta)] = \int_0^{2\pi} a\cos(\omega s + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = 0, \quad -\infty < t < +\infty$$

相关函数

$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=E[a\cos(\omega s+\Theta)a\cos(\omega t+\Theta)]$

$=a^2\int_0^{2\pi}\cos(\omega s+\theta)\cos(\omega t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=\frac{a^2}{2}\cos\omega(t-s),\quad -\infty<s,t<+\infty$ ……4 分

（2）协方差函数

$C_X(s,t)=R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t)$

$=\frac{a^2}{2}\cos\omega(t-s)-0=\frac{a^2}{2}\cos\omega(t-s),\quad -\infty<s,t<+\infty$

方差函数：$D_X(t)=C_X(t,t)=\frac{a^2}{2},\quad -\infty<t<+\infty$

均方值函数：$\Phi_X(t)=R_X(t,t)=\frac{a^2}{2},\quad -\infty<t<+\infty$ ……4 分

（3）随机过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$是二阶矩过程，且

（a）任意$t\in T, m_X(t)=m_X$（常数）；

（b）任意$s,t\in T, R_X(t-s)=\frac{a^2}{2}\cos\omega(s-t)=R_X(s,t)$，

因此：$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$为平稳过程. ……2 分

2. 设随机过程$\{X(t),t\in[a,b]\}$是正交增量过程，且$X(a)=0$，试证明：

$$R_X(s,t)=\Phi_X(\min(s,t)),\ s,t\in[a,b].$$

证明：不妨设$s\le t$，则

$R_X(s,t)=E[\overline{X(s)}X(t)]=E[\overline{X(s)}(X(t)-X(s)+X(s))]$ ……2 分

$=E[\overline{X(s)}(X(t)-X(s))]+E\left|X(s)\right|^2=\Phi_X(s)=\Phi_X(\min(s,t)),s,t\in[a,b]$ ……2 分

（备注：证明过程中若没有共轭符号也正确）