12-13 学年第二学期高等数学试题(A)参考答案

一、填空题（20 分）　　1. 条件收敛　　2. $-5\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$

3. $x-3y+z+2=0$　　4. $-\pi+\ln 3$　　5. $\frac{2\pi}{15}\left(25\sqrt{5}+1\right)$

二．选择题（20 分）　6.C　7. A　8.C　9.B　10.D

三．解答题（60 分）

11.解：$f'(x)=\arctan x,\quad f''(x)=\frac{1}{1+x^2}.$

将后者展开，有$f''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},-1<x<1$

从而$f'(x)=f'(0)+\int_0^x f''(x)\mathrm{d}x=0+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},$

$f(x)=f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(2n+1\right)\left(2n+2\right)}x^{2n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}x^{2n}$

当$x=\pm 1$时，右边级数收敛，所以上式成立范围可扩大到$x=\pm 1$,

即上式成立的范围为$-1\le x\le 1$，把$x=1$代入上式左右两边得

$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$

从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}=\frac{\pi}{2}-\ln 2.$

12. 解：设经过L且垂直于平面π的平面方程为

$\pi_1: A(x-1)+By+C(z-1)=0,$

则由已知条件得$A-B+2C=0, A+B-C=0,$

由此解得$A:B:C=-1:3:2,$于是π_1的方程为$x-3y-2z+1=0$

从而L_0的方程为$\begin{cases}x-y+2z-1=0\\x-3y-2z+1=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x=2y\\z=-\frac{1}{2}(y-1)\end{cases}$

设$\left(x,y\right)$为L_0绕y轴旋转一周所成曲面的任一点，

它可由L_0上的点$\left(x_1,y_1\right)$生成，则$\begin{cases}y=y_1\\x^2+z^2={x_1}^2+{z_1}^2\end{cases}$

利用$\begin{cases}x_1=2y_1\\z_1=-\frac{1}{2}(y_1-1)\end{cases}$，得$L_0$绕$y$轴旋转一周所成曲面的方程为

$x^2+z^2=4y^2+\frac{1}{4}\left(y-1\right)^2$，即$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$

13.解：由$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y+1,\frac{\partial u}{\partial y}=x+2y+3,$

有$\mathrm{d}u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=\left(2x+y+1\right)dx+\left(x+2y+3\right)dy,$

于是$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(2x+y+1\right)dx+\left(x+2y+3\right)dy+C$

$=\int_0^x\left(2x+1\right)dx+\int_0^y\left(x+2y+3\right)dy+C=x^2+x+xy+y^2+3y+C.$

再由$u(0,0)=1,$得$C=1$，从而$u(x,y)=x^2+xy+x+y^2+3y+1$

再由$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\frac{\partial u}{\partial y}=0,$解$\begin{cases}2x+y+1=0,\\x+2y+3=0\end{cases}$得驻点$\left(\frac{1}{3},-\frac{5}{3}\right)$

$A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\quad B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1,\quad C=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2,$

$B^2-AC=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=-3<0,$

且$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2>0,$所以$u\left(\frac{1}{3},-\frac{5}{3}\right)=-\frac{4}{3}$为极小值.

14. (1)设区域D的第一项象限部分为D_1，第三象限部分为D_2

于是$\iint\limits_D\left(\mathrm{e}^{x^2}+\sin(x+y)\right)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_1}\sin(x+y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}\sin(x+y)\mathrm{d}\sigma$

$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^3}^{x}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y+\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_x^{x^3}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^3}^{x}\sin(x+y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_x^{x^3}\sin(x+y)\mathrm{d}y$

$=\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}(x-x^3)\mathrm{d}x+\int_{-1}^0\mathrm{e}^{x^2}(x^3-x)\mathrm{d}x-\int_0^1\cos(x+x)\mathrm{d}x+$

$\int_0^1\cos(x+x^3)\mathrm{d}x-\int_{-1}^0\cos(x+x^3)\mathrm{d}x+\int_{-1}^0\cos(x+x)\mathrm{d}x$

令$x=-t$，则第二个积分与第一个可合并，第三个积分与第六个相抵消，

第四个与第五个相抵消，于是

原式$=2\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}(x-x^3)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2-\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}x^2\mathrm{d}x^2$

$=\mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^u u\mathrm{d}u=\mathrm{e}-2.$

（2）化成球面坐标$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-\left(x^2+y^2\right)}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sin\varphi\mathrm{d}r$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{4}\left(2-\sqrt{2}\right).$

15. (1) 令$L=L_1+\overline{BOA}$，D为其所包围的椭圆区域，由格林公式

得$\oint_L (1+y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D 1\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{\pi ab}{2}$

而$\int_{\overline{BOA}}(1+y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y=\int_{-a}^{a}1\cdot\mathrm{d}x=2a$

再根据曲线积分的性质$\int_{L_1}(1+y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y=\oint_L(1+y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y-\int_{\overline{BOA}}(1+y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y$

$=\dfrac{\pi ab}{2}-2a.$

(2) 旋转抛物面Σ在xOy平面上的投影记为$\Sigma_1: z=0, x^2+y^2\le 1$取$\Sigma_1$的下侧，则$\Sigma$与$\Sigma_1$形成一封闭曲面

将它们所围的空间区域记为Ω.此时$P(x,y,z)=0, Q(x,y,z)=z^2-y, R(x,y,z)=x^2-z, \dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=-2$

由高斯公式得$\iint\limits_\Sigma\left(x^2-z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\left(z^2-y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\left(x^2-z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\left(z^2-y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iint\limits_{\Sigma_1}\left(x^2-z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\left(z^2-y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

$=\iiint\limits_\Omega(-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_1}\left(x^2-0\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0=(-2)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot r\mathrm{d}r=-\dfrac{3\pi}{4}.$

16解：S的单位法向量为$\vec{n}=\left\{-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}},-\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right\}$,

将原给的第二型曲面积分化为第一型曲面积分，得

原积分$=\iint\limits_S\dfrac{-x^2-y^2+z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}S$

再将S投影到平面xOy，投影域$D=\left\{(x,y)\middle|2\le\sqrt{x^2+y^2}\le 4\right\}$,

$\mathrm{d}S=\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$

从而原积分$=-\dfrac{1}{2}\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma=-\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_2^4 r^3\mathrm{d}r=-60\pi.$