2010-2011 学年第二学期高等数学试题 (A)

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设区域 D 为 $|x|+|y|\le 1$，则 $\iint\limits_D xyf\left(x^2+y^2\right)dxdy=$___________。

2. 过点 M_0(2，4，0)且与直线 $L:\begin{cases}x+2z-1=0\\ y-3z-2=0\end{cases}$ 平行的直线方程是___________。

3. 设有一力 $\vec{F}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$，则 $\vec{F}$ 在 $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ 方向上的分力为____________。

4. 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 的外侧面，则曲面积分 $\iint\limits_S zdxdy$ 的值是___________。

5. 敛域 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{4^n}$ 的和为_____________________________。

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\left(n=1,2,\cdots\right)$ 无界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\left(x-1\right)^n$ 的收敛域为___________。

   (A) $(-1,1]$；　(B) $[-1,1)$；　(C) $[0,2)$；　(D) $(0,2]$

2. 设 $0\le a_n<\dfrac{1}{n}\left(n=1,2,\cdots\right)$，则下列级数中肯定收敛的是________。

   (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$；　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n a_n$；　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}^{\,n}$；　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n a_n^2$

3. 已知 $f\left(x\right),f\left(y\right)$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\big||x|+|y|\le 1\right\}$ 上连续，且 $f\left(x\right)>0,f\left(y\right)>0$，则 $\iint\limits_D\dfrac{af\left(y\right)+bf\left(x\right)}{f\left(x\right)+f\left(y\right)}dxdy=(\qquad)$

   (A) $a-b$；　(B) $a+b$；　(C) $2\left(a+b\right)$；　(D) $2\left(a-b\right)$；

4. 设 S 是平面 $x+y+z=4$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 截出的有限部分，则曲面积分 $\iint\limits_S yds$ 的值是___________。

   (A) 0；　(B) $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$；　(C) $4\sqrt{3}$；　(D) π；

5. 设 Ω 是由椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 围成的区域，则 $\iiint\limits_\Omega z^2dxdydz$ 的值为________。

(A) 0；　　(B) $\dfrac{4}{15}\pi abc^3$；　　(C) $4\sqrt{3}$；　　(D) π；

三、解答题（1~6 题每题 8 分，第 7 题 12 分，共 60 分）

1. 设 $f\left(u,v\right)$ 具有二姐连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，

又 $g\left(x,y\right)=f\left[xy,\dfrac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)\right]$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$。

2.求过直线 L_1 且平行于直线 L_2 的平面方程，其中

$$L_1:\begin{cases}2x+y-z-1=0\\3x-y+2z-2=0\end{cases},\ L_2:\begin{cases}5x+y-z+4=0\\x-y-z-4=0\end{cases}$$

3.计算 $\displaystyle\int_L\frac{\left(x+y\right)dx-\left(x-y\right)dy}{x^2+y^2}$，

其中 L 是沿 $y=\pi\cos x$ 由 $A\left(\pi,-\pi\right)$ 到 $B\left(-\pi,-\pi\right)$ 的曲线段。

4.叙述并证明格林公式，然后计算曲线积分 $\int_L\left(e^x\sin y-my\right)dx+\left(e^x\cos y-my\right)dy$，其中曲线 L 为从点 $A\left(a,0\right)$ 到点 $O\left(0,0\right)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$。

5.求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+2}{n!}x^{2n+1}$ 的收敛域及和函数。

6. 证明函数 $z=\left(1+e^y\right)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值点，但无极小值点。

7.（1）设函数 $f(x,y)$ 在圆域 $x^2+y^2\le 1$ 上二阶连续可微，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-\left(x^2+y^2\right)}$，

计算 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$。

（2）判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$ 的敛散性，若此级数收敛，则求其和。