练习题答案

第1章

1.1节

1. a)是，T　b)是，F　c)是，T　d)是，F　e)不是　f)不是
2. a)今天不是星期四。　b)新泽西州有污染。
   c)$2+1\neq 3$。　d)缅因州的夏天不热或阳光不明媚。
3. a)在海岸附近没发现过鲨鱼。
   b)在新泽西海岸游泳是允许的，并且在海岸附近发现过鲨鱼。
   c)在新泽西海岸不允许游泳，或者在海岸附近发现过鲨鱼。
   d)如果在新泽西海岸游泳是允许的，那么在海岸附近没发现过鲨鱼。
   e)如果在海岸附近没发现过鲨鱼，那么在新泽西海岸游泳是允许的。
   f)如果在新泽西海岸不允许游泳，那么在海岸附近没发现过鲨鱼。
   g)在新泽西海岸允许游泳当且仅当在海岸附近没发现过鲨鱼。
   h)在新泽西海岸不允许游泳，并且在新泽西海岸允许游泳或者在海岸附近没发现过鲨鱼。
4. a)$p\wedge q$　b)$p\wedge\neg q$　c)$\neg p\wedge\neg q$
   d)$p\vee q$　e)$p\rightarrow q$　f)$(p\vee q)\wedge(p\rightarrow\neg q)$　g)$q\leftrightarrow p$
5. a)$\neg p$　b)$p\wedge\neg q$　c)$p\rightarrow q$　d)$\neg p\rightarrow\neg q$
   e)$p\rightarrow q$　f)$q\wedge\neg p$　g)$q\rightarrow p$
6. a)$r\wedge\neg p$　b)$\neg p\wedge q\wedge r$　c)$r\rightarrow(q\leftrightarrow\neg p)$
   d)$\neg q\wedge\neg p\wedge r$　e)$(q\rightarrow(\neg r\wedge\neg p))\wedge\neg((\neg r\wedge\neg p)\rightarrow q)$　f)$(p\wedge r)\rightarrow\neg q$
7. a)False(假)　b)True(真)　c)True(真)　d)True(真)
8. a)异或：你只能取一种饮料。
   b)同或：长密码可能有任意符号组合。
   c)同或：两门课程都学过的学生更符合要求。
   d)两种可能解释中的一种；旅客想同时使用两种现金付款，或者商店不允许这样。
9. a)同或：如果你学过微积分或计算机科学，或两者都学过，就可以选修离散数学。异或：如果你学过微积分或计算机科学，但并非两者都学过，就可以选修离散数学。这里很可能想表示的是同或。
   b)同或：你可以拿回扣，也可以得低息贷款，你也可以既拿回扣又得低息贷款。异或：你可以拿回扣，也可以得低息贷款，但不能既拿回扣，又得低息贷款。这里很可能想表示的是异或。
   c)同或：你可以从A列选两项，不选B列；你也可以不选A列而从B列选三项；你还可以共选五项，包括A列两项和B列三项。异或：你可以从A列选两项，也可以从B列选三项，但不能都选。这里很可能想表示的是异或。
   d)同或：2英尺多的雪或冷风零下100度(华氏)，或两者均具备，学校将停课。异或：2英尺多的雪或冷风零下100度，但并非两者均具备，学校将停课。这里很可能想表示的是同或。
10. a)东北风吹就下雪。
    b)温暖若能持续一周，苹果树就会开花。
    c)若活塞队赢得冠军，那么他们打败了湖人队。
    d)如果你登上了朗峰顶，那你必定已走了8英里(1英里＝1.6公里)。
    e)如果你世界闻名，就能做终身教授。
    f)如果你驾车超过400英里，就得买汽油了。
    g)如果你的保修单有效，你购买CD机必定还不足90天。
11. a)当且仅当外边很热时你才能买冰激淋卷。

b)当且仅当你手持唯一的胜券时才能赢得比赛。
c)当且仅当你有关系时才会得到提拔。
d)当且仅当你看电视时思想才会衰退。
e)当且仅当我乘坐火车的日子，它才会晚点。

12. a)逆命题：“只有今天下雪，我明天才去滑雪。”逆否命题：“如果我明天不滑雪，那么今天一定没有下雪。”否命题：“如果今天不下雪，那么我明天不滑雪。”
b)逆命题：“如果我今天来上课，就会有测验。”逆否命题：“如果我今天不来上课，就不会有测验。”否命题：“如果不会有测验，我就不来上课。”
c)逆命题：“如果一个正整数没有 1 和它自身以外的因数，它就是素数。”逆否命题：“如果一个正整数有既不是 1 又不是它自己的因数，它不是素数。”否命题：“如果一个正整数不是素数，那它有 1 和它自身以外的因数。”

13. a)2　　b)16　　c)64　　d)16

14. a)

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

b)

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

c)

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \to q$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	F

d)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \to (p \wedge q)$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	T

e)

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow$ $(\neg q \to \neg p)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

f)

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \to (q \to p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

15. 对 a)、b)、c)、d)和 f)有如下表：

p	q	$(p \vee q) \to (p \oplus q)$	$(p \oplus q) \to (p \wedge q)$	$(p \vee q) \oplus (p \wedge q)$	$(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow q)$	$(p \oplus q) \to (p \oplus \neg q)$
T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	T	F	T	T

对 e)有下表：

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$p\leftrightarrow q$	$\neg p\leftrightarrow \neg r$	$(p\leftrightarrow q)\oplus(\neg p\leftrightarrow \neg r)$
T	T	T	F	F	T	T	F
T	T	F	F	T	T	F	T
T	F	T	F	F	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T	F

16.

p	q	$p\rightarrow \neg q$	$\neg p\leftrightarrow q$	$(p\rightarrow q)\vee(\neg p\rightarrow q)$	$(p\rightarrow q)\wedge(\neg p\rightarrow q)$	$(p\leftrightarrow q)\vee(\neg p\leftrightarrow q)$	$(\neg p\leftrightarrow \neg q)\leftrightarrow(p\leftrightarrow q)$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	F	T	T

17.

p	q	r	$p\rightarrow(\neg q\vee r)$	$\neg p\rightarrow(q\rightarrow r)$	$(p\rightarrow q)\vee(\neg p\rightarrow r)$	$(p\rightarrow q)\wedge(\neg p\rightarrow r)$	$(p\leftrightarrow q)\vee(\neg q\leftrightarrow r)$	$(\neg p\leftrightarrow \neg q)\leftrightarrow(q\leftrightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T	F
T	F	T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	F
F	F	F	T	T	T	F	T	T

18.

p	q	r	s	$p\leftrightarrow q$	$r\leftrightarrow s$	$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(r\leftrightarrow s)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F
T	T	F	T	T	F	F
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	F	T	F
T	F	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T	F
F	T	T	F	F	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	F	F
F	F	F	F	T	T	T

19. a)按位或是 111 1111；按位并是 000 0000；按位异或(按位加)是 111 1111。

b)按位或是 1111 1010；按位并是 1010 0000；按位异或(按位加)是 0101 1010。

c)按位或是 10 0111 1001；按位并是 00 0100 0000；按位异或(按位加)是 10 0011 1001。

d)按位或是 11 1111 1111 ；按位并是 00 0000 0000；按位异或(按位加)是 11 1111 1111。

20. 0.2，0.6

21. 0.8，0.6

22. a)第 99 条语句为真，其余语句为假。

b)语句 1 至 50 均为真，语句 51 至 99 均为假。

c)这不可能发生，这是个悖论。

23. “如果我问你右边的路是否通向废墟，你会说是吗?”

24. a)$q\rightarrow p$ b)$q\wedge\neg p$ c)$q\rightarrow p$ d)$\neg q\rightarrow\neg p$

25. 不一致

26. 一致

27. NEW **AND** JERSEY **AND** BEACHES，(JERSEY **AND** BEACHES)**NOT** NEW

28. A 是武士，B 是流氓。

29. A 是武士且 B 是武士。

30. A 是流氓，B 是武士。

31. 按薪水减少的顺序：傅雷德、麦吉、杰尼斯。

32. 侦探可以断定男管家和厨师说谎，但不能判断究竟是园丁还是杂役说真话。

33. 日本人养斑马，挪威人喝矿泉水。

1.2 节

1. 等价关系由下表中相应两列的一致推出。

p	$p\wedge$T	$p\vee$F	$p\wedge$F	$p\vee$T	$p\vee p$	$p\wedge p$
T	T	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F

2. a)

p	q	$p\vee q$	$q\vee p$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

b)

p	q	$p\wedge q$	$q\wedge p$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	F

3.

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge(q\vee r)$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

4. a) 简并不富有，或者简并不高兴。

b)卡洛斯明天不会骑脚踏车，而且她也不会去跑步。

c)梅既不步行上学，也不乘坐汽车上学。

d)Ibrahim 并不聪明，或者 Ibrahim 并不努力。

5. a)

p	q	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\to p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

b)

p	q	$p\vee q$	$p\to(p\vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

c)

p	q	$\neg p$	$p\to q$	$\neg p\to(p\to q)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

d)

p	q	$p\wedge q$	$p\to q$	$(p\wedge q)\to(p\to q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

e)

p	q	$p\to q$	$\neg(p\to q)$	$\neg(p\to q)\to p$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

f)

p	q	$p\to q$	$\neg(p\to q)$	$\neg q$	$\neg(p\to q)\to\neg q$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	F	T	T

6. 对每种情况都证明只要前提成立，结论就成立。

a)如果前题 $p\wedge q$ 成真，那么根据合取的定义，结论 p 必为真。

b)如果前题 p 成真，根据析取的定义，结论 $p\vee q$ 也为真。

c)如果前题 $\neg p$ 成真，亦即 p 为假，那么结论 $p\to q$ 为真。

d)如果前题 $p\wedge q$ 为真，那么 p 和 q 均为真，所以结论 $p\to q$ 为真。

e)如果前题 $\neg(p\to q)$为真，那么 $p\to q$ 为假，所以 p 为真(同时 q 为假)。

f)如果前题 $\neg(p\to q)$为真，那么 $p\to q$ 为假，所以 p 为真而 q 为假。因而结论 $\neg q$ 为真。

7. 题目：该真值表所显示的第四行和第一行完全一样证明了(a)部分，第六行和第一行完全一样证明了(b)部分。

p	q	$p\wedge q$	$p\vee(p\wedge q)$	$p\vee q$	$p\wedge(p\vee q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F

8. 是永真式。

9. 当 p 和 q 有相反的真值时两边恰好都为真。

10. 命题 $\neg p\leftrightarrow q$ 为真当且仅当 $\neg p$ 和 q 有同样的真值，也就是 p 和 q 有不同的真值。类似地，$p\leftrightarrow\neg q$ 在完全同样的情况下为真。所以这两个表达式逻辑等价。

11. 命题 $\neg(p\leftrightarrow q)$为真当且仅当 $p\leftrightarrow q$ 为假，即 p 和 q 有不同的真值。由于这恰恰就是 $\neg p\leftrightarrow q$ 为真的情况，所以这两个表达式逻辑等价。

12. 为了使$(p\to r)\wedge(q\to r)$为假，两个蕴含式之一必为假，当 r 为假且 p 和 q 至少有一个为真时恰会发生这种情况。但这种情形下 $p\vee q$ 为真且 r 为假，当$(p\vee q)\to r$ 为假时满足条件。由于两个命题恰在相同情形下为假，因此它们逻辑等价。

13. 为了使$(p\to r)\vee(q\to r)$为假，两个蕴含式都必须为假，当 r 为假且 p 和 q 都为真时恰会发生这种情况。但这种情形下 $p\wedge q$ 为真且 r 为假，当$(p\wedge q)\to r$ 为假时满足条件。由于两个命题恰在相同情形下为假，因此它们逻辑等价。

14. 这一事实在 1.1 节中定义双蕴含时已看到过。当 p 和 q 有相同的真值时两边都为真。
15. 见下表，最后一列全为 T。

p	q	r	$p\to q$	$q\to r$	$(p\to q)\wedge(q\to r)$	$p\to r$	$(p\to q)\wedge(q\to r)\to(p\to r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

16. 这些命题不可能逻辑等价，因为当 p、q 和 r 全为假时，$(p\to q)\to r$ 也为假，但 $p\to(q\to r)$ 为真。
17. 许多答案都是有可能。
如果 r 为真，p、q 和 s 为假，那么 $(p\to q)\to(r\to s)$ 必为假，$(p\to r)\to(q\to s)$ 必为真。
18. a) $p\vee\neg q\vee\neg r$　b) $(p\vee q\vee r)\wedge s$　c) $(p\wedge T)\vee(q\wedge F)$
19. 如果取两次对偶，那么每个 $\vee$ 先变成 $\wedge$，又变回 $\vee$；每个 $\wedge$ 先变成 $\vee$，又变回 $\wedge$；每个 **T** 先变为 **F**，再变回 **T**；每个 **F** 先变为 **T**，再变回 **F**。因此 $(s^*)^*=s$。
20. 令 p 和 q 为只含运算符 $\wedge$、$\vee$ 和 $\neg$，以及 **T** 和 **F** 的等价复合命题，注意 $\neg p$ 和 $\neg q$ 也等价。反复用德摩根定律尽可能把这些复合命题中推进，同时改 $\vee$ 为 $\wedge$，改 $\wedge$ 为 $\vee$，改 **T** 为 **F**，改 **F** 为 **T**。这样能证明 $\neg p$ 和 $\neg q$ 与 p^* 和 q^* 是一样的，只是其中的原子命题被它的非命题所代替。由此可断定 p^* 和 q^* 也等价，因为 $\neg p$ 和 $\neg q$ 等价。
21. $(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$
22. 对给定的复合命题 p，构造其真值表，然后用析取范式写下一个逻辑等价于 p 的命题 q。由于 q 只涉及 $\neg$、$\wedge$ 和 $\vee$，这就证明了这三个运算符构成一个功能完全集。
23. 根据练习 22，给定一个复合命题 p，我们可以写出一个只含 $\neg$、$\wedge$ 和 $\vee$，且与 p 逻辑等价的命题 q。根据德摩根定律，我们可以用 $\neg(\neg p_1\vee\neg p_2\vee\cdots\vee\neg p_n)$ 取代 $(p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_n)$，从而消去所有 $\wedge$。
24. 在 p 或 q 或两者均为假时，$\neg(p\wedge q)$ 为真；当 p 和 q 均为真时，$\neg(p\wedge q)$ 为假。由于这就是 $p\mid q$ 的定义，所以这两个复合命题逻辑等价。
25. $\neg(p\vee q)$ 在 p 和 q 均为假时为真，否则为假。由于这是 $p\downarrow q$ 的定义，两者逻辑等价。
26. $((p\downarrow p)\downarrow q)\downarrow((p\downarrow p)\downarrow q)$
27. 从真值表或 $p\mid q$ 的定义可直接得出结论。
28. 16
29. 若数据库是打开的，那么或者系统置于初始状态，或者监督程序置于关闭状态。
30. 全部 9 个。
31. 要判断 c 是否为永真式，将判断可满足性的算法应用于 $\neg c$。如果算法表明 $\neg c$ 是可满足的，则可知 c 不是永真式；如果算法称 $\neg c$ 不是可满足的，则 c 是永真式。

1.3 节

1. a) T　b) T　c) F
2. a) T　b) F　c) F　d) F
3. a) 有个学生除周末外每天都花 5 个多小时在课堂上。
b) 所有学生除周末外每天都花 5 个多小时在课堂上。
c) 有个学生并非除周末外每天都花 5 个多小时在课堂上。
d) 没有学生除周末外每天都花 5 个多小时在课堂上。
4. a) 每个喜剧演员都很有趣。
b) 每个人都是有趣的喜剧演员。
c) 存在某个人，若她或他是喜剧演员，那么她或他很有趣。
d) 一些喜剧演员很有趣。

5. a) $\exists x(P(x) \land Q(x))$ b) $\exists x(P(x) \land \neg Q(x))$ c) $\forall x(P(x) \lor Q(x))$ d) $\forall x \neg(P(x) \lor Q(x))$
6. a)T b)T c)F d)F e)T f)F
7. a)True b)True c)True d)True
8. a)True b)False c)True d)False
9. a) $P(0) \lor P(1) \lor P(2) \lor P(3) \lor P(4)$ b) $P(0) \land P(1) \land P(2) \land P(3) \land P(4)$
   c) $\neg P(0) \lor \neg P(1) \lor \neg P(2) \lor \neg P(3) \lor \neg P(4)$ d) $\neg P(0) \land \neg P(1) \land \neg P(2) \land \neg P(3) \land \neg P(4)$
   e) $\neg(P(0) \lor P(1) \lor P(2) \lor P(3) \lor P(4))$ f) $\neg(P(0) \land P(1) \land P(2) \land P(3) \land P(4))$
10. a) $P(1) \lor P(2) \lor P(3) \lor P(4) \lor P(5)$ b) $P(1) \land P(2) \land P(3) \land P(4) \land P(5)$
    c) $\neg(P(1) \lor P(2) \lor P(3) \lor P(4) \lor P(5))$ d) $\neg(P(1) \land P(2) \land P(3) \land P(4) \land P(5))$
    e) $(P(1) \land P(2) \land P(4) \land P(5)) \lor (\neg P(1) \lor \neg P(2) \lor \neg P(3) \lor \neg P(4) \lor \neg P(5))$
11. 许多答案都是有可能。
    a)所有的学生都在离散数学的课上；所有的学生都在这个世界上。
    b)所有美国的参议员；所有大学足球运动员。
    c)乔治·布什和杰布·布什；所有美国的政客。
    d)比尔·克林顿和乔治·布什；所有美国的政客。
12. 令 $C(x)$为命题函数“x 在你的班上”。
    a) $\exists xH(x)$和 $\exists x(C(x) \land H(x))$，其中 $H(x)$是“x 会说印地语”。
    b) $\forall xF(x)$和 $\forall x(C(x) \to F(x))$，其中 $F(x)$是“x 很友好”。
    c) $\exists x \neg B(x)$和 $\exists x(C(x) \land \neg B(x))$。其中 $B(x)$是“x 出生在加利福尼亚”。
    d) $\exists xM(x)$和 $\exists x(C(x) \land M(x))$，其中 $M(x)$是“x 曾演过电影”。
    e) $\forall x \neg L(x)$和 $\forall x(C(x) \to \neg L(x))$，其中 $L(x)$是“x 上过逻辑编程课程”。
13. 令 $P(x)$为“x 是完美的”；$F(x)$为“x 是你的朋友”；论域为所有人。
    a) $\forall x \neg P(x)$ b) $\neg \forall xP(x)$ c) $\forall x(F(x) \to P(x))$
    d) $\exists x(F(x) \land P(x))$，假定这意味着“至少有一个”你的朋友是完美的。
    e) $\forall x(F(x) \land P(x))$或$(\forall xF(x)) \land (\forall xP(x))$
    f) $(\neg \forall xF(x)) \lor (\exists x \neg P(x))$
14. 令 $Y(x)$为命题函数，x 在你的学校或班上。
    a)如果我们令 $V(x)$为“x 住在越南”，则我们有 $\exists xV(x)$（如果论域只是你的校友），或者是 $\exists x(Y(x) \land V(x))$（如果论域是所有人）。如果令 $D(x, y)$表示某人 x 住在国家 y，则可以重写后者为 $\exists x(Y(x) \land D(x, 越南))$。
    b)如果令 $H(x)$为“x 会说印地语”，则我们有 $\exists x \neg H(x)$（论域是你的校友），或者是 $\exists x(Y(x) \land \neg H(x))$（论域是所有人）。如果令 $S(x, y)$表示某人 x 会说语言 y，则可以重写后者为 $\exists x(Y(x) \land \neg S(x, 印地语))$。
    c)如果令 $J(x)$、$P(x)$和 $C(x)$为命题函数，分别表示 x 会 Java、Prolog 和 C++。则有 $\exists x(J(x) \land P(x) \land C(x))$（如果论域是你校友），或者有 $\exists x(Y(x) \land J(x) \land P(x) \land C(x))$（如果论域是所有人）。如果令$K(x, y)$表示某人 x 会编程语言 y，则可以重写后者为 $\exists x(Y(x) \land K(x, \text{Java}) \land K(x, \text{Prolog}) \land K(x, \text{C++}))$。
    d)如果令 $T(x)$为“x 喜欢泰国食物”，则我们有 $\forall xT(x)$（如果论域是你的同班同学），或者有 $\forall x(Y(x) \to T(x))$（如果论域是所有人）。如果令 $E(x, y)$表示某人 x 喜欢类型 y 的食物，则可以重写后者为 $\forall x(Y(x) \to E(x, 泰国))$。
    e)如果令 $H(x)$为“x 打曲棍球”，则我们有 $\exists x \neg H(x)$（如果论域是你的同班同学），或者有 $\exists x(Y(x) \land \neg H(x))$（如果论域是所有人）。如果令 $P(x, y)$表示某人 x 玩游戏 y，则可以重写后者为 $\exists x(Y(x) \land \neg P(x, 曲棍球))$。
15. 令 $T(x)$表示 x 是永真式，$C(x)$表示 x 是矛盾。
    a) $\exists xT(x)$
    b) $\forall x(C(x) \to T(\neg x))$
    c) $\exists x \exists y(\neg T(x) \land \neg C(x) \land \neg T(y) \land \neg C(y) \land T(x \lor y))$
    d) $\forall x \forall y((T(x) \land T(y)) \to T(x \land y))$

16. a)$Q(0, 0, 0)\wedge Q(0, 1, 0)$　b)$Q(0, 1, 1)\vee Q(1, 1, 1)\vee Q(2, 1, 1)$
c)$\neg Q(0, 0, 0)\vee\neg Q(0, 0, 1)$　d)$\neg Q(0, 0, 1)\vee\neg Q(1, 0, 1)\vee\neg Q(2, 0, 1)$

17. a)令 $T(x)$为谓词表示 x 会学习新技巧，论域为年老的狗。原命题为$\exists xT(x)$，否定为$\forall x\neg T(x)$："没有年老的狗会学习新的技巧"。
b)令 $C(x)$为谓词，表示 x 会微积分，论域为兔子。原命题为$\neg\exists xC(x)$，否定为$\exists xC(x)$："有一只兔子会微积分"。
c)令 $F(x)$为谓词，表示 x 会飞，论域为鸟类。原命题为$\forall xF(x)$，否定为$\exists x\neg F(x)$："有一只鸟不会飞"。
d)令 $T(x)$为谓词，表示 x 会说话，论域为狗。原命题为$\neg\exists xT(x)$，否定为$\exists xT(x)$："有一只狗会说话"。
e)令 $F(x)$和 $R(x)$为谓词，分别表示 x 会法语和俄语，论域为班上的人。原命题为$\neg\exists x(F(x)\wedge R(x))$，否定为$\exists x(F(x)\wedge R(x))$："班上有人会法语和俄语"。

18. a)没有反例　b)$x=0$　c)$x=2$

19. a)$\forall x((F(x, 25\,000)\vee S(x, 25))\rightarrow E(x))$，其中 $E(x)$是"某人 x 在特定的年份中是高贵乘客"，$F(x, y)$是"x 在特定的年份飞行里程超过 y 英里"，$S(x, y)$是"x 在特定年份坐飞机超过 y 次"。
b)$\forall x(((M(x)\wedge T(x, 3))\vee(\neg M(x)\wedge T(x, 3.5)))\rightarrow Q(x))$，其中 $Q(x)$是"某人 x 有资格参加马拉松"，$M(x)$是"x 是男人"，$T(x, y)$是"x 跑马拉松的时间不超过 y 小时"。
c)$M\rightarrow((H(60)\vee(H(45)\wedge T))\wedge\forall yG(B, y))$，其中 M 是命题"学生取得硕士学位"，$H(x)$是"学生至少修过 x 个学分"，T 是命题"学生写了论文"，$G(x, y)$是"学生在课程 y 上的成绩为 x 或更高"。
d)$\exists x((T(x, 21)\wedge G(x, 4.0))$，其中 $T(x, y)$是"某人 x 修了多于 y 个学分"，$G(x, p)$是"x 获得了平均为 p 的成绩"。

20. a)如果某台打印机不能提供服务且很忙，则一些作业丢失了。
b)如果每台打印机都很忙，则有作业在队列中。
c)如果有作业在队列中且丢失了，则一些打印机不能提供服务。
d)如果每台打印机都很忙且每个作业都在队列中，则一些作业丢失了。

21. a)$(\exists xF(x, 10))\rightarrow\exists xS(x)$，其中 $F(x, y)$是"磁盘 x 有多于 ykB 的空闲空间"，$S(x)$是"邮件消息 x 可以被保存"。
b)$(\exists xA(x))\rightarrow\forall x(Q(x)\rightarrow T(x))$，其中 $A(x)$是"报警 x 是主动的"，$Q(x)$是"消息 x 被排队"，$T(x)$是"消息 x 被传送"。
c)$\forall x((x\neq$主控制台$)\rightarrow T(x))$，其中 $T(x)$是"诊断监控器跟踪系统 x 的状态"。
d)$\forall x(\neg L(x)\rightarrow B(x))$，其中 $L(x)$是"电话会议的主叫方将参与者 x 放到特殊列表中"，$B(x)$是"参与者 x 要支付费用"。

22. 不等价。
令 $P(x)$可以为真也可以为假，$Q(x)$总是为假。
那么$\vee x(P(x)\rightarrow Q(x))$为假，$\vee xP(x)\rightarrow\vee xQ(x)$为真。

23. 当 $P(x)$和 $Q(x)$至少有一个对论域中的至少一个 x 值为真时，这两条语句为真。

24. a)若 A 为真，两边都逻辑等价于$\forall xP(x)$。若 A 为假，左边显然为假。此外，对每个 x，$P(x)\wedge A$ 为假，所以右边为假。因此两边逻辑等价。
b)若 A 为真，两边均逻辑等价于$\exists xP(x)$。若 A 为假，左边显然为假。此外，对每个 x，$P(x)\wedge A$ 为假。所以$\exists x(P(x)\wedge A)$为假。因此两边逻辑等价。

25. 可以通过证明一面为真，当且仅当另一面也为真，来确定其等价性。A)假设 A 为真，那么对于所有的 x，$P(x)\rightarrow A$ 也为真；因此在这种情况下左边项永远为真。通过类似的推理，等式的右边项也永远为真。另一方面，假设 A 为假，有两个子情况。如果对每个 x 都有 $P(x)$为假，那么 $P(x)\rightarrow A$ 是一种空虚的真，因此左边项也是空虚的真。通过相同的推理方法能够证明右边项也为真，原因是在这个子情况下 $\exists xP(x)$ 为真，但 A 为假。因此在所有的情况下，两个命题具有相同的真值。B)如果 A 为真，那么两边都是平凡真，原因是条件语句具有相同的结论。如果 A 为假，那么有两个子情况。如果对于某个 x，$P(x)$为假，那么对于那个 x，$P(x)\rightarrow A$ 为空虚的真，因此左边项为真。通过相同的推理右边项也为真，因为在这个子情况下 $\forall xP(x)$ 为假。对于第二个子情况，假设对于每个 x，$P(x)$都为真，因此对于每个

x，$P(x)\to A$ 都为假。因此左边项为假(没有 x 满足条件命题为真)。由于这是一个具有真假设、假结论的条件语句，因此右边项也为假。因此，在所有的情况下，这两个命题都具有相同的真值。

26. 为证明不是逻辑等价，令 $P(x)$为语句"x 为正"，$Q(x)$为语句"x 为负"，论域为整数集合。于是 $\exists xP(x)\land\exists xQ(x)$为真，但 $\exists x(P(x)\land Q(x))$为假。

27. a)True　b)False，除非论域只含一个元素
c)True

28. a)Yes　b)No　c)juana，kiko
d)math273，cs301　e)juana，kiko

29. sibling(X，Y):-mother(M，X)，mother(M，Y)，father(F，X)，father(F，Y)

30. a) $\forall x(P(x)\to\neg Q(x))$　b) $\forall x(Q(x)\to R(x))$　c) $\forall x(P(x)\to\neg R(x))$
d)不能推出。有可能有爱虚荣的教授，因为前提并没有排除无知者以外爱虚荣的人。

31. a) $\forall x(P(x)\to\neg Q(x))$　b) $\forall x(R(x)\to\neg S(x))$　c) $\forall x(\neg Q(x)\to S(x))$
d) $\forall x(P(x)\to\neg R(x))$
e)可以推出。假设 x 是婴儿，则由第一个前提，x 行为不合逻辑，因此由第三个前提，x 被人轻视。第二个前提说如果 x 能管理鳄鱼，x 就不会被人轻视。因此，x 不能管理鳄鱼。

1.4 节

1. a)对每个实数 x，存在实数 y 使得 x 小于 y。
b)对每个实数 x 和实数 y，如果 x 和 y 都是非负的，则它们的积是非负的。
c)对每个实数 x 和实数 y，存在实数 z 使得 $xy=z$。

2. a)班上的某个学生已经给班上的另一个学生发送了消息。
b)班上的某个学生已经给班上的每个学生都发送了消息。
c)班上的每个学生已经给班上的至少一个学生发送了消息。
d)班上有某个学生已经被班上的每个学生都发送了消息。
e)班上的每个学生已经被班上的至少一个学生发送了消息。
f)班上的每个学生已经给班上的每个学生都发送了消息。

3. a)Sarah Smith 已经访问过 www. att. com。
b)至少有一个人已经访问过 www. imdb. org。
c)Jose Orez 已经访问了至少一个网站。
d)至少有一个网站 Ashok Puri 和 Cindy Yoon 都访问过了。
e)除了 David Belcher，还有一个人访问过 David Belcher 已经访问过的所有网站。
f)有两个不同的人已经访问过完全相同的网站。

4. a)Abdallah Hussein 不喜欢日本菜。
b)学校的某些学生喜欢韩国菜，学校的每个人都喜欢墨西哥菜。
c)有一些菜肴不是 Monique Arsenault 喜欢就是 Jay Johnson 喜欢。
d)对学校中任意一对不同的学生，他们中至少有一个不喜欢某种菜。
e)学校中有两个学生喜欢恰恰相同的菜肴集合。
f)对学校中的每对学生，他们对某种菜肴有相同的看法(或者都喜欢，或者都不喜欢)。

5. a) $\forall xL(x,\text{Jerry})$　b) $\forall x\exists yL(x,y)$　c) $\exists y\forall xL(x,y)$
d) $\forall x\exists y\neg L(x,y)$　e) $\exists x\neg L(\text{Lydia},x)$　f) $\exists x\forall y\neg L(y,x)$
g) $\exists x(\forall yL(y,x)\land\forall z((\forall wL(w,z))\to z=x))$
h) $\exists x\exists y(x\neq y\land L(\text{Lynn},x)\land L(\text{Lynn},y)\land\forall z(L(\text{Lynn},z)\to(z=x\lor z=y)))$
i) $\forall xL(x,x)$　j) $\exists x\forall y(L(x,y)\leftrightarrow x=y)$

6. a) $A(\text{Lois},\text{Professor Michaels})$　b) $\forall x(S(x)\to A(x,\text{Professor Gross}))$
c) $\forall x(F(x)\to(A(x,\text{Professor Miller})\lor A(\text{Professor Miller},x)))$
d) $\exists x(S(x)\land\forall y(F(y)\to\neg A(x,y)))$　e) $\exists x(F(x)\land\forall y(S(y)\to\neg A(y,x)))$
f) $\forall y(F(y)\to\exists x(S(x)\lor A(x,y)))$　g) $\exists x(F(x)\land\forall y((F(y)\land(y\neq x))\to A(x,y)))$
h) $\exists x(S(x)\land\forall y(F(y)\to\neg A(y,x)))$

7. a) $\neg M(\text{Chou}, \text{Koko})$　b) $\neg M(\text{Arlene}, \text{Sarah}) \land \neg T(\text{Arlene}, \text{Sarah})$
 c) $\neg M(\text{Deborah}, \text{Jose})$　d) $\forall x M(x, \text{Ken})$　e) $\forall x \neg T(x, \text{Nina})$
 f) $\forall x((T-x, \text{Avi}) \lor M(x, \text{Avi}))$　g) $\exists x \forall y(y \neq x \to M(x, y))$
 h) $\exists x \forall y(y \neq x \to (M(x, y) \lor T(x, y)))$　i) $\exists x \exists y(x \neq y \land M(x, y) \land M(y, x))$
 j) $\exists x M(x, x)$　k) $\exists x \forall y(x \neq y \to (\neg M(x, y) \land \neg T(y, x)))$
 l) $\forall x(\exists y(x \neq y \land (M(y, x) \lor T(y, x))))$　m) $\exists x \exists y(x \neq y \land M(x, y) \land T(y, x))$
 n) $\exists x \exists y(x \neq y \land \forall z((z \neq x \land z \neq y) \to (M(x, z) \lor M(y, z) \lor T(x, z) \lor T(y, z))))$
8. a) $\forall x P(x)$，其中 $P(x)$ 为“x 需要一门离散数学课”，论域是所有计算机科学的学生集合。
 b) $\exists x P(x)$，其中 $P(x)$ 为“x 有台 PC（计算机）”，论域是班上所有学生的集合。
 c) $\forall x \exists y P(x, y)$，其中 $P(x, y)$ 为“x 选修 y”，x 的论域是班上所有学生的集合，y 的论域是计算机科学课程的集合。
 d) $\exists x \exists y P(x, y)$，其中 $P(x, y)$ 以及 x、y 的论域同 c)。
 e) $\forall x \forall y P(x, y)$，其中 $P(x, y)$ 为“x 去过 y”，x 的论域是班上所有学生的集合，y 的论域是校园内所有楼房的集合。
 f) $\exists x \exists y \forall z(P(z, y) \to Q(x, z))$，其中 $P(z, y)$ 为“z 在 y 中”，$Q(x, z)$ 为“x 去过 z”，其中 x 的论域是班上所有学生的集合，y 的论域是校园内所有楼房的集合，z 的论域则是房间的集合。
 g) $\forall x \forall y \exists z(P(z, y) \land Q(x, z))$，其中 P、Q 及 x、y、z 的论域与 f) 相同。
9. a) $\forall u \exists m(A(u, m) \land \forall n(n \neq m \to \neg A(u, n)))$，其中 $A(u, m)$ 意味着用户 u 已经访问过邮箱 m。
 b) $\exists p \forall e(H(e) \land S(p, \text{运行})) \to S(\text{内核}, \text{正确运行})$，其中 $H(e)$ 意味着错误条件 e 有效，$S(x, y)$ 意味着 x 的状态是 y。
 c) $\forall u \forall s(E(s, .\text{edu}) \to A(u, s))$，其中 $E(s, x)$ 意味着站点 s 有扩展 x，$A(u, s)$ 意味用户 u 可访问站点 s。
 d) $\exists x \exists y(x \neq y \land \forall z((\forall s M(z, s)) \leftrightarrow (z = x \lor z = y)))$，其中 $M(a, b)$ 意味着系统 a 监控远程服务器 b。
10. a) $\forall x \forall y((x<0) \land (y<0) \to (x+y<0))$　b) $\neg \forall x \forall y((x>0) \land (y>0) \to (x-y>0))$
 c) $\forall x \forall y(x^2+y^2 \geqslant (x+y)^2)$　d) $\forall x \forall y(|xy| = |x||y|)$
11. $\forall x \exists a \exists b \exists c \exists d((x>0) \to x = a^2+b^2+c^2+d^2)$，其中论域是全体整数。
12. a) $\forall x \forall y((x<0) \land (y<0) \to (xy>0))$　b) $\forall x(x-x=0)$
 c) $\forall x \exists a \exists b(a \neq b \land \forall c(c^2 = x \leftrightarrow (c = a \lor c = b)))$　d) $\forall x((x<0) \to \neg \exists y(x = y^2))$
13. a) 对于实数，存在乘法的等式。
 b) 两个负实数的积总是正实数。
 c) 存在实数 x 和 y 使得 $x^2 > y$ 但 $x < y$。
 d) 实数在加法操作下是有界的。
14. a) True　b) True　c) True　d) True　e) True
 f) False　g) False　h) True　i) False
15. a) $P(1,1) \land P(1,2) \land P(1,3) \land P(2,1) \land P(2,2) \land P(2,3) \land P(3,1) \land P(3,2) \land P(3,3)$
 b) $P(1,1) \lor P(1,2) \lor P(1,3) \lor P(2,1) \lor P(2,2) \lor P(2,3) \lor P(3,1) \lor P(3,2) \lor P(3,3)$
 c) $(P(1,1) \land P(1,2) \land P(1,3)) \lor (P(2,1) \land P(2,2) \land P(2,3)) \lor (P(3,1) \land P(3,2) \land P(3,3))$
 d) $(P(1,1) \lor P(2,1) \lor P(3,1)) \land (P(1,2) \lor P(2,2) \lor P(3,2)) \land (P(1,3) \lor P(2,3) \lor P(3,3))$
16. a) $\exists x \forall y \exists z \neg T(x, y, z)$　b) $\exists x \forall y \neg P(x, y) \land \exists x \forall y \neg Q(x, y)$
 c) $\exists x \forall y(\neg P(x, y) \lor \forall z \neg R(x, y, z))$　d) $\exists x \forall y(P(x, y) \land \neg Q(x, y))$
17. a) $\exists x \exists y \neg P(x, y)$　b) $\exists y \forall x \neg P(x, y)$
 c) $\exists y \exists x(\neg P(x, y) \land \neg Q(x, y))$　d) $(\forall x \forall y P(x, y)) \lor (\exists x \exists y \neg Q(x, y))$
 e) $\exists x(\forall y \exists z \neg P(x, y, z) \lor \forall z \exists y \neg P(x, y, z))$
18. 任何一个具有 4 个或更多成员的域都会使命题为真；具有 3 个或更少成员的域都会使命题为假。
19. a) 班上有这样的同学，在任何两门不同的数学课中，要么这两门都没选，要么他选了这两门。
 b) 每个人要么已访问过利比亚，要么从未访问过利比亚以外的任何国家。
 c) 有人已攀登过喜玛拉雅山的每座山峰。
 d) 有个人既没和 Kevin Bacon 出演同一部电影，也没和任何与 Kevin Bacon 出演过电影的人出演同一部电影。

20. a) $x=2$，$y=-2$　b) $x=-4$　c) $x=17$，$y=-1$
21. $\forall x\forall y\forall z((x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z))$
22. $\forall m\forall b(m\neq 0\rightarrow\exists x(mx+b=0\wedge\forall w(mw+b=0\rightarrow w=x)))$
23. a) True　b) False　c) True
24. $\neg(\exists x\forall yP(x,y))\leftrightarrow\forall x(\neg\forall yP(x,y))\leftrightarrow\forall x\exists y\neg P(x,y)$
25. a)假定 $\forall xP(x)\wedge\exists xQ(x)$ 为真，那么对所有 x，$P(x)$ 为真，而且有个元素 y 使 $Q(y)$ 为真。因为 $P(x)\wedge Q(y)$ 对所有 x 成真，而且有 y 使 $Q(y)$ 成真，$\forall x\exists y(P(x)\wedge Q(y))$ 为真。反过来，假定第 2 个命题为真。令 x 为论域中的一个元素。有元素 y 使 $Q(y)$ 为真，所以 $\exists xQ(x)$ 为真。由于 $\forall xP(x)$ 也为真，所以第 1 个命题也为真。
    b)假定 $\forall xP(x)\vee\exists xQ(x)$ 为真。那么要么对所有 x，$P(x)$ 为真；要么有 y，使 $Q(y)$ 为真。在第 1 种情况下，$P(x)\vee Q(y)$ 对所有 x 成真，所以 $\forall x\exists y(P(x)\vee Q(y))$ 为真。在第 2 种情况下，对特定的 y，$Q(y)$ 成真，所以 $P(x)\vee Q(y)$ 对所有 x 成真，从而 $\forall x\exists y(P(x)\vee Q(y))$ 成真。反过来，假定第 2 个命题为真。如果 $P(x)$ 对所有 x 为真，那么第 1 个命题为真；否则 $P(x)$ 对某个 x 为假，对这一 x 必有 y 使 $P(x)\vee Q(y)$ 成真。因此 $Q(y)$ 必成真，于是 $\exists yQ(y)$ 为真。这样第 1 个命题为真。
26. 我们将要说明，在表达式的子表达式均可转换为前束范式(PNF)的情况下，怎样把这个表达式转换为前束范式。这样从内向外就可以用这一方法把所有表达式转换为前束范式。由 1.2 节的练习 23 可知，可以假定命题中只使用逻辑联结符 $\vee$ 和 $\neg$。注意不带量词的命题已经是前束范式的形式。(这是论证的基本情况。)现在假定命题是 $QxP(x)$ 形的，其中 Q 为量词。因为 $P(x)$ 是比原命题短的表达式，它可以转换为 PNF。Qx 后面跟上这 PNF 仍是 PNF，它等价于原命题。其次，假定命题为 $\neg P$。如果 P 已经是 PNF 形式的，我们可以用表 1-23 的等价关系把否定符号移到所有量词内层。最后，假定命题为 $P\vee Q$ 形的，其中 P 和 Q 均为 PNF。如果只有 P 和 Q 中的一个含量词，那么可以把量词移到它们两个的前面。如果 P 和 Q 均含量词，可以重写 $P\vee Q$，使两个量词都出现在形为 $R\vee S$ 的命题之前，然后再把 $R\vee S$ 转换为 PNF。

1.5 节

1. 演绎推理；有效的；由于假设为真，因此结论为真。
2. a)附加　b)化简　c)假言推理　d)拒取式　e)假言三段论
3. 设 w 是“兰迪努力工作”，设 d 是“兰迪是个笨小子”，设 j 是“兰迪将得到这份工作”。前提是 w，$w\rightarrow d$ 和 $d\rightarrow\neg j$。用假言推理和前两个前提得出 d。用假言推理和最后一个前提得出 $\neg j$，它就是所需要的结论：“兰迪将得不到这份工作”。
4. 用全称量词消去来得出“若苏格拉底是人，则苏格拉底是要死的”。用假言推理来得出苏格拉底是要死的。
5. a)有效结论是“我周二没有休假”，“我周四休过假”，“周四下过雨”。
    b)“我没有吃辣的食物而且没有打雷”是有效结论。
    c)“我是聪明的”是有效结论。
    d)“拉尔夫不是主修计算机科学的”是有效结论。
    e)“你购买许多东西对美国有利而且对你有利”是有效结论。
    f)“老鼠啃咬它们的食物”和“兔子不是鼠类”是有效结论。
6. 假设 p_1，p_2，…，p_n 为真，想要证明 $q\rightarrow r$ 为真。如果 q 为假，就不必证明了，否则 q 为真，通过验证给定参数的有效性，(每当 p_1，p_2，…，p_n，q 为真，r 必为真)可知 r 为真。
7. a)设 $c(x)$ 是“x 是在这个班里”，$j(x)$ 是“x 知道如何用 JAVA 编写程序”，$h(x)$ 是“x 可以找到高薪工作”。前提是 c(道格)，j(道格)，$\forall x(j(x)\rightarrow h(x))$。用全称量词消去和最后一个前提得出 j(道格)$\rightarrow h$(道格)。对这个结论和第 2 个前提用假言推理得出 h(道格)。用合取和第 1 个前提得出 c(道格)$\wedge h$(道格)。最后，用存在量词引入得出所需要的结论 $\exists x(c(x)\wedge h(x))$。
    b)设 $c(x)$ 是“x 是在这个班里”，$w(x)$ 是“x 喜欢鲸鱼观察”，$p(x)$ 是“x 关心海洋污染”。前提是 $\exists x(c(x)\wedge w(x))$ 和 $\forall x(w(x)\rightarrow p(x))$。根据第 1 个前提，对一个具体的人 y 来说有 $c(y)\wedge w(y)$。化简得出 $w(y)$。用第 2 个前提和全称量词消去得出 $w(y)\rightarrow p(y)$。用假言推理得出 $p(y)$，再用合取得出 $c(y)\wedge p(y)$。最后，用存在量词引入得出所需要的结论 $\exists x(c(x)\wedge p(x))$。
    c)设 $c(x)$ 是“x 是在这个班里”，$p(x)$ 是“x 拥有一台个人电脑”，$w(x)$ 是“x 会使用字处理程序”。前提是 c

(齐克)，$\forall x(c(x)\to p(x))$和$\forall x(p(x)\to w(x))$。用第 2 个前提和全称量词消去得出 c(齐克)$\to p$(齐克)。用第 1 个前提和假言推理得出 p(齐克)。用第 3 个前提和全称量词消去得出 p(齐克)$\to w$(齐克)。最后，用假言推理得出所需要的结论 w(齐克)。

d)设 $j(x)$是“x 是在新泽西”，$f(x)$是“x 住在距离大海 50 英里之内”，$s(x)$是“x 见过大海”。前提是 $\forall x(j(x)\to f(x))$和$\exists x(j(x)\land\neg s(x))$。第 2 个前提和存在量词消去意味着对一个具体的人 y 来说有 $j(y)\land\neg s(y)$。化简得出对这个人 y 来说有 $j(y)$。用全称量词消去和第 1 个前提得出 $j(y)\to f(y)$，再用假言推理得出 $f(y)$。用化简从 $j(y)\land\neg s(y)$得出$\neg s(y)$。所以用合取得出 $f(y)\land\neg s(y)$。最后，用存在量词引入得出所需要的结论$\exists x(f(x)\land\neg s(x))$。

8. a)正确，使用全称量词消去和假言推理　　b)无效，肯定结论谬误
c)无效，否定前提谬误　　d)正确，使用全称量词消去和假言推理

9. 我们知道存在一些 x 使得 $H(x)$为真，但不能得出结论 Lola 是这样的 x。

10. a)断定结论的谬论。b) 开始问题的谬论。c)使用否定后件式的有效参数。d) 否定假设的谬论。

11. 由第二个前提可知，有一些不喝咖啡的狮子。令 leo 是个动物，通过简化可知 leo 是只狮子。通过肯定前件式由第一个前提可知 leo 是凶猛的。因此，leo 是凶猛的并且不喝咖啡。由存在量词的定义，存在着不喝咖啡的凶猛动物，也就是说，某种凶猛的动物不喝咖啡。

12. 错误出现在第(5)步，原因是我们不能假设令 P 为真的 C 和令 Q 为真的 C 是相同的。

13. 给定前提$\forall x(P(x)\to Q(x))$和$\neg Q(a)$，我们想证明$\neg P(a)$。用反证法假设$\neg P(a)$为假，那么 $P(a)$为真。因此，我们得到 $Q(a)$，但这与给定的前提条件相矛盾。因此我们的假定一定是错误的。

14.

步骤	理由
1. $\forall x(P(x)\land R(x))$	前提引入
2. $P(a)\land R(a)$	全称例示，用步骤 1
3. $P(a)$	化简，用步骤 2
4. $\forall x(P(x)\to (Q(x)\land S(x)))$	前提引入
5. $Q(a)\land S(a)$	全称假言推理，用步骤 3 和 4
6. $S(a)$	化简，用步骤 5
7. $R(a)$	化简，用步骤 2
8. $R(a)\land S(a)$	合取，用步骤 7 和 6
9. $\forall x(R(x)\land S(x))$	全程生成，用步骤 5

15.

步骤	理由
1. $\exists x\neg P(x)$	前提引入
2. $\neg P(c)$	存在例示 ，用步骤 1
3. $\forall x(P(x)\lor Q(x))$	前提引入
4. $P(c)\lor Q(c)$	全称例示，用步骤 3
5. $Q(c)$	析取三段论，用步骤 4 和 2
6. $\forall x(\neg Q(x)\lor S(x))$	前提引入
7. $\neg Q(c)\lor S(c)$	全称例示，用步骤 6
8. $S(c)$	析取三段论，用步骤 5 和 7
9. $\forall x(R(x)\to\neg S(x))$	前提引入
10. $R(c)\to\neg S(c)$	全称例示，用步骤 9
11. $\neg R(c)$	方法用步骤 8 和 10
12. $\exists x\neg R(x)$	存在生成，用步骤 11

16. 令 p 为“下雨了”；令 q 为“Yvette 带伞了”；令 r 为“Yvette 被淋湿了”。三个前提分别是$\neg p\lor q$，$\neg q\lor\neg r$ 和 $p\lor\neg r$。对前两者进行消解得出$\neg p\lor\neg r$。将此式与第三个式子消解得出$\neg r$，题目得证。

17. 假设这个命题是可满足的。对前两个子句使用消解可得出 $q\lor q$，换句话说，q 必须为真。对后两个子句运用消解可得$\neg q\lor\neg q$，换句话说，$\neg q$ 必须为真。这是矛盾，因此命题不是可满足的。

18. 有效。

1.6 节

1. 令 $n=2k+1$，$m=2l+1$ 都是奇数，那么 $n+m=2(k+l+1)$是偶数。
2. 假设 n 是偶数，对于某个整数 k 有 $n=2k$，因此有 $n^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2)$。由于可以把 n^2 表示为某个整数的 2 倍，因此可以得出结论 n^2 是偶数。
3. 直接证明：假设 $m+n$ 和 $n+p$ 都为偶数，那么一定对某个整数 s 和 t，有 $m+n=2s$，$n+p=2t$。把以上两式相加，得到 $m+2n+p=2s+2t$，等式两边同时减去 $2n$，提取公因子，得到 $m+p=2s+2t-2n=2(s+t-n)$。由于 $m+p$ 可以表示成某个整数的 2 倍，因此有 $m+p$ 是偶数。
4. 因为 n 为奇数，因此对于某个整数 k，可以写作 $n=2k+1$，因此$(k+1)^2-k^2=k^2+2k+1-k^2=2k+1=n$。
5. 假设 r 是有理数，i 是无理数，并且 $s=r+i$ 是有理数，由例 7，$s+(-r)=i$ 是有理数相矛盾。
6. 由于$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$ 是有理数，而$\sqrt{2}$是无理数，因此可得两个无理数的乘积并不一定是无理数。
7. 如果 $1/x$ 是有理数，那么由定义，对于某个整数 p 和q，$1/x=p/q$，其中 $q\neq0$。由于 $1/x$ 不能为 0(如果为 0，就可以在等式两边同时乘以 0，那么有 $1=x\cdot0$)，可得 $p\neq0$。由普通的代数运算法则得 $x=1/(1/x)=1/(p/q)=q/p$。因此，x 可写作两个整数的商，并且分母不为 0。由定义可得 x 是有理数。
8. 假设 $x\geqslant1$ 或 $y\geqslant1$ 不正确，那么有 $x<1$ 并且 $y<1$，把这两个不等式相加，可得 $x+y<2$，这与 $x+y\geqslant2$ 相反。
9. a)假设 n 为奇数，那么对于某个整数 k，一定有 $n=2k+1$，因此 $n^3+5=2(4k^3+6^2+3k+3)$，$n^3+5=2(4k^3+6k^2+3k+3)$，由于 n^3+5 可写作某个整数的 2 倍，因此其为偶数。

   b)假设 n^3+5 为奇数，并且 n 为奇数。由于 n 为奇数，并且两个奇数的乘积也为奇数，因此有 n^2 和 n^3 都为奇数。但是由于 $5=(n^3+5)-n^3$ 可以表示为两个奇数的差，应该为偶数，因此假设错误。
10. 命题正确，因为 0 不是一个正整数。
11. $P(1)$是正确的，因为$(a+b)^1=a+b\geqslant a^1+b^1=a+b$。直接证明。
12. 如果在一个星期中的每一天选择 9 或者更少的天数，那么统计结果至多是 $9\times7=63$。但是我们选择了 64 天。矛盾表明至少有 10 天是在一周中的同一天上。
13. 假设 a/b 是一个有理根，a 和 b 都是整数并且这个分数是最简的(a 和 b 没有比 1 大的最大公约数)，把这个根代入方程得到 $a^3/b^3+a/b+1=0$。方程两边同时乘以 b^3 得到 $a^3+ab^2+b^3=0$。如果 a 和 b 都是奇数，那么方程式的左侧就是 3 个奇数的和，结果也必为奇数。如果 a 是奇数，b 为偶数，那么方程式的左侧就是奇数+偶数+偶数，结果也为奇数。类似地，如果 a 是偶数，b 是奇数，那么方程式的左侧就是偶数+偶数+奇数，结果也为奇数。因为分数 a/b 是最简的，a 和 b 同为偶数的情况是不能出现非的。因此，在所有的情况下方程式的左侧都为奇数不可能为 0。矛盾表明这样的根是不存在的。
14. 首先，假设 n 是奇数，因此对于某个整数 k 有 $n=2k+1$。那么 $5n+6=5(2k+1)+6=10k+11=2(5k+5)+1$。因此可得 $5n+6$ 为奇数。为了证明反例不成立，假设 n 为偶数，对于某个整数 k，一定有 $n=2k$。因此 $5n+6=10k+6=2(5k+3)$，可得 $5n+6$ 为偶数。因此 n 为奇数当且仅当 $5n+6$ 是奇数。
15. 这个命题为真。假设 m 既不是 1 也不是 -1，因此 mn 有一个大于 1 的因子 m。另一方面，由于 $mn=1$，因此 1 没有这个因子。所以可得 $m=1$ 或者 $m=-1$。在第一个例子中 $n=1$，在第二个例子中 $n=-1$，因为 $n=1/m$。
16. 我们要证明所有等于 x 的数都为偶数。如果 x 为偶数，那么对于某个整数 k，有 $x=2k$。因此有 $3x+2=3\cdot2k+2=6k+2=2(3k+1)$可以写为 $2t$ 的形式，其中 $t=3k+1$。类似地，$x+5=2k+5=2k+4+1=2(k+2)+1$，因此 $x+5$ 是奇数，$x^2=(2k)^2=2(2k^2)$，因此 x^2 为偶数。对于反例，可以用反证法来证明，假设 x 不是偶数，因此 x 为奇数，并且对于某个整数 k，有 $x=2k+1$，因此 $3x+2=3(2k+1)+2=6k+5=2(3k+2)+1$ 可以写作 $2t+1$ 的形式，其中 $t=3k+2$，必为奇数。同样，$x+5=2k+1+5=2(k+3)$，因此 $x+5$ 是偶数。在例 1 中已经证明 x^2 奇数。
17. 我们将用反证法(i)→(ii)，(ii)→(i)，(i)→(iii)和(iii)→(i)。第一步首先假设 $3x+2$ 是有理数，对于整数 p 和 q，且 $q\neq0$，有 $3x+2=p/q$，可以把等式变形，得到 $x=((p/q)-2)/3=(p-2q)/(3q)$，其中 $3q\neq0$，这表明 x 是有理数。对于第二个条件语句，假设 x 是有理数，同样地，$x=p/q$，其中 $q\neq0$，可以得到 $3x+2=(3p+2q)/q$，其中 $q\neq0$。这表明 $3x+2$ 是有理数。对于第三个条件语句，假设 $x/2$ 是有理数，同样地，对于某两个整数 p 和 q 有 $x/2=p/q$，其中 $q\neq0$。可以得到 $x=2p/q$，其中 $q\neq0$，这表明 x 是有理数。对于第四个条件语句，假设 x 是有理数，对于某两个整数 p 和 q 有 $x=p/q$，可得 $x/2=p/(2q)$，

其中$2q\neq 0$，这就表明 $x/2$ 是有理数。

18. No
19. 假设 $p_1\to p_4\to p_2\to p_5\to p_3\to p_1$，要想证明其中一个命题蕴含除此之外的任意一个命题，重复使用假设三段论即可。
20. 我们将用反证法给出证明。假设 a_1，a_2，…，a_n 都小于 A，A 是这些数的平均值，那么就可以得到 $a_1+a_2+\cdots+a_n<nA$。不等式两边同时除以 n 可得 $A=(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n<A$，自相矛盾。
21. 我们将通过证明(i)蕴含(ii)，(ii)蕴含(iii)，(iii)蕴含(iv)，(iv)蕴含(i)来证明这四个命题是相互等价的。首先，假设 n 为偶数，那么对于某个整数 k，有 $n=2k$，$n+1=2k+1$，因此 $n+1$ 为奇数。这就证明了(i)蕴含(ii)。下一步假设 $n+1$ 是奇数，对于某个整数 k，则有 $n+1=2k+1$，因此 $3n+1=2n+(n+1)=2(n+k)+1$，这就证明了 $3n+1$ 是奇数，即(ii)蕴含(iii)。下一步假设 $3n+1$ 是奇数，对于某个整数 k，则存在 $3n+1=2k+1$，可得 $3n=(2k+1)-1=2k$，因此 $3n$ 是偶数，这就证明了(iii)蕴含(iv)。最后，假设 n 不是偶数，那么 n 就是奇数，可得 $n=2k+1$，那么 $3n=3(2k+1)=6k+3=2(3k+1)+1$，因此 $3n$ 是奇数。利用反证法完成证明(iv)蕴含(i)。

1.7 节

1. $1^2+1=2\geqslant 2=2^1$；$2^2+1=5\geqslant 4=2^2$；$3^2+1=10\geqslant 8=2^3$；$4^2+1=17\geqslant 16=2^4$。
2. 如果 $x\leqslant y$，那么 $\max(x,y)+\min(x,y)=y+x=x+y$。如果 $x\geqslant y$，$\max(x,y)+\min(x,y)=x+y$。由于只有这两种情况，因此等式总成立。
3. 存在 4 种情况。
   1：$x\geqslant 0$ 并且 $y\geqslant 0$，那么 $|x|+|y|=x+y=|x+y|$。
   2：$x<0$ 并且 $y<0$，那么 $|x|+|y|=-x+(-y)=-(x+y)=|x+y|$。因为 $x+y<0$。
   3：$x\geqslant 0$ 并且 $y<0$，那么 $|x|+|y|=x+(-y)$，如果 $x\geqslant -y$，那么 $|x+y|=x+y$。但是由于 $y<0$，$-y>y$，因此 $|x|+|y|=x+(-y)>x+y=|x+y|$。如果 $x<-y$，$|x+y|=-(x+y)=-x+(-y)$。但是由于 $x\geqslant 0$，$x\geqslant -x$，因此 $|x|+|y|=x+(-y)\geqslant -x+(-y)=|x+y|$。
   4：$x<0$ 并且 $y\geqslant 0$，与情况 3 相同，只不过 x 和 y 颠倒了一下。
4. 10，001，10，002，…，10，100 都是非平方项，因为 $100^2=10\,000$，$101^2=10\,201$，如此可进行推断。
5. $8=2^3$ 并且 $9=3^2$。
6. 令 $x=2$，$y=\sqrt{2}$，如果 $x^y=2^{\sqrt{2}}$ 是无理数，即结束。如果不成立，则令 $x=2^{\sqrt{2}}$，$y=\sqrt{2}/4$。那么 $x^y=(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}/4}=2^{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2})/4}=2^{1/2}=\sqrt{2}$。
7. a)这个命题断言 x 的存在具有某个性质。如果令 $y=x$，可得 $P(x)$为真。如果 y 是除 x 的任意值，则$P(x)$为假。因此 x 是使 P 为真的唯一值。b)第一个子句的陈述这样一个事实，存在一个使 P 为真的值。第二个子句的含义是只要有两个值同时令 P 为真，它们实际上是同一个值。c)这个子句断言令 P 为真的 x 的存在，并且有一个更深层的含义就是只要找到一个令 P 为真的值，这个值就是 x，换句话说，x 是使 P 为真的唯一值。
8. 等式 $|a-c|=|b-c|$ 等价于 $a-c=b-c$ 或 $a-c=-b+c$ 的析取。第一个式子等价于 $a=b$，这与假设矛盾，因此原式等价于 $a-c=-b+c$。在等式两边加上 $b+c$ 并除以 2 可得 $c=(a+b)/2$。因此有唯一解。而且，因为奇整数 a 和 b 的和是偶数，所以 $c=(a+b)/2$ 是整数。
9. 我们要求解 $n=(k-2)+(k+3)$中的 k。使用一般的代数规则，可知此式等价于 $k=(n-1)/2$。换句话说，这是唯一可使等式为真的 k 值。因为 n 为奇数，$n-1$ 为偶数，因此 k 是整数。
10. 若 x 是整数，则可取 $n=x$ 且 $\varepsilon=0$。在这种情况下无其他解，因为如果整数 n 大于 x，则 n 至少是 $x+1$，这将使 $\varepsilon\geqslant 1$。如果 x 不是整数，则向上取整，称此整数为 n。令 $\varepsilon=n-x$。显然 $0\leqslant\varepsilon<1$，对这个 n，这是唯一合适的 ε，且 n 不能再大，因为 ε 限制为小于 1。
11. 两个不同的正实数 x 和 y 的调和平均值总小于他们的几何平均值。要证明 $2xy/(x+y)<\sqrt{xy}$，在不等式两边同时乘以$(x+y)/(2\sqrt{xy})$，得到等价不等式 $\sqrt{xy}<(x+y)/2$，该式可以用例 14 来证明。
12. 写在黑板上数字之和的奇偶性是不会改变的，因为 $j+k$ 与 $|j-k|$ 同奇偶(在每一步这个和减少 $j+k$ 而增加 $|j-k|$)。因此过程结束时的整数必定与 $1+2+\cdots+(2n)=n(2n+1)$同奇偶，由于 n 是奇数，$n(2n+1)$是奇数。
13. 不失一般性，我们可以假设 n 是非负的，因为整数的四次方及其负数的四次方是相同的。根据练习 36 的

提示，我们将任意正整数 n 除以 10，得到商 k 和余数 l，因此 $n=10k+l$。l 是 0 和 9 之间的整数。然后我们计算这 10 种情况下的 n^4。我们得到如下值，其中 X 是 10 的倍数的某个整数，具体值不必关心。

$$
\begin{aligned}
(10k+0)^4 &= 10\,000k^4 = 10\,000k^4+0\\
(10k+1)^4 &= 10\,000k^4+X\cdot k^3+X\cdot k^2+X\cdot k+1\\
(10k+2)^4 &= 10\,000k^4+X\cdot k^3+X\cdot k^2+X\cdot k+16\\
(10k+3)^4 &= 10\,000k^4+X\cdot k^3+X\cdot k^2+X\cdot k+81\\
(10k+4)^4 &= 10\,000k^4+X\cdot k^3+X\cdot k^2+X\cdot k+256\\
(10k+5)^4 &= 10\,000k^4+X\cdot k^3+X\cdot k^2+X\cdot k+625\\
(10k+6)^4 &= 10\,000k^4+X\cdot k^3+X\cdot k^2+X\cdot k+1296\\
(10k+7)^4 &= 10\,000k^4+X\cdot k^3+X\cdot k^2+X\cdot k+2401\\
(10k+8)^4 &= 10\,000k^4+X\cdot k^3+X\cdot k^2+X\cdot k+4096\\
(10k+9)^4 &= 10\,000k^4+X\cdot k^3+X\cdot k^2+X\cdot k+6561
\end{aligned}
$$

由于 X 是 10 的倍数，因此对应项不会对结果的个位数产生影响。因此，个位数分别是 0，1，6，1，6，5，6，1，6，1，所以个位数总是 0，1，5 或 6。

14. 由于当 $n>4$ 时，$n^3>100$，我们只需要注意当 $n=1$，$n=2$，$n=3$ 和 $n=4$ 时不满足 $n^2+n^3=100$。

15. 因为 $5^4=625$，x 和 y 都必须小于 5，那么 $x^4+y^4\leqslant 4^4+4^4=512<625$。

16. 如果 $a\leqslant\sqrt[3]{n}$，$b\leqslant\sqrt[3]{n}$，或者 $c\leqslant\sqrt[3]{n}$ 为假，那么 $a>\sqrt[3]{n}$，$b>\sqrt[3]{n}$ 并且 $c>\sqrt[3]{n}$，把这些不等式相乘，得到 $abc<(\sqrt[3]{n})^3=n$，蕴含我们假设 $n=abc$ 的否定。

17. 通过找到一个公分母，我们能推断给定的有理数是 a/b 和 c/b，其中 b 为正整数，a 和 c 为整数，并且 $a<c$。特别地，$(a+1)/b\leqslant c/b$。因此，$x=(a+\frac{1}{2}\sqrt{2})/b$ 大小介于给定的两个有理数，原因是 $0<\sqrt{2}<2$，而且，x 是无理数，因为如果 x 是有理数，那么 $2(bx-a)=\sqrt{2}$ 也应该是有理数，这与 1.6 节的例 10 相矛盾。

18. a)不失一般性，假设 x 序列已经是非递减有序序列，因为我们可以重新标记下标。对于 y 序列只有有限种序关系，因此如果我们能证明只要我们找到次序颠倒的 y_i 和 y_j(即 $i<j$ 时 $y_i>y_j$)，就可以通过交换它们的次序使和递增(或至少保持不变)，那么我们将证明当序列 y 非递增时，和是最大值。事实上，如果我们进行交换，那么就是把 $x_iy_j+x_jy_i$ 加到和上，并减去 $x_iy_i+x_jy_j$，这样相当于加上 $x_iy_j+x_jy_i-x_iy_i-x_jy_j=(x_j-x_i)(y_i-y_j)$，根据我们的假设，它是非负的。

    b)类似于(a)。

19. a)$6\to3\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$

    b)$7\to22\to11\to34\to17\to52\to26\to13\to40\to20\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$

    c)$17\to52\to26\to13\to40\to20\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$

    d)$21\to64\to32\to16\to8\to4\to2\to1$

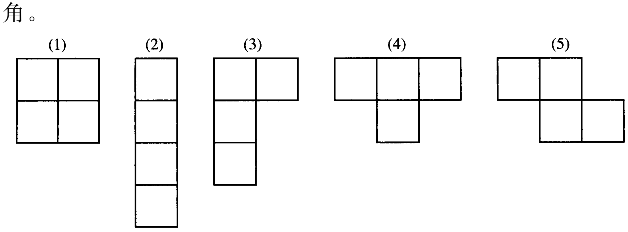
20. 不失一般性，我们假设棋盘的左上角和右上角被移除，将三个骨牌水平填充到第一行的其余部分，并用四个骨牌水平填充其他 7 行。

21. 因为棋盘具有偶数个方格，所以要么棋盘的每行有偶数个方格，要么每列有偶数个方格。如果每行有偶数个方格，那么通过水平放置骨牌来填充棋盘；如果每列有偶数个方格，那么通过垂直放置骨牌来填充棋盘。

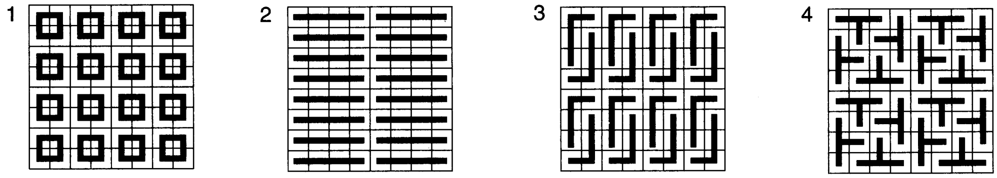
22. 如果必须移除方格 1 和 16，我们可以旋转这个棋盘。方格 2 必须用一个骨牌覆盖。如果骨牌被放置覆盖方格 2 和 6，那么下面的骨牌位置依次为 5-9、13-14 和 10-11，没有办法覆盖方格 15。否则，方格 2 必须由放在 2-3 上的骨牌覆盖。然后下面的骨牌位置改为：4-8、11-12、6-7、5-9 和 10-14，仍然没有办法覆盖方格 15。

23. 移除与一个白角相邻的两个黑色方格，并移除除了那个角之外的两个白色方格。没有骨牌可以覆盖那个白角。

24. a)



b)下图给出了用前 4 中格板的填充：



为了说明格板 5 不能填充棋盘，将方格标记为 1～64，从上至下一次一行，每行再从左至右。因此，方格 1 是左上角，方格 64 是右下角。假设我们做了一次填充，由对称性，不失一般性，假设这次填充位于左上角，覆盖方格 1、2、10 和 11。这要求在右侧有一次填充要与它相邻，覆盖方格 3、4、12 和 13。依此下去，我们得到覆盖方格 6、7、15 和 16 的填充。这样就无法覆盖方格 8，因此，这种填充可能不存在。

补充练习

1. a)$q \to p$　　b)$q \wedge p$　　c)$\neg q \vee \neg p$　　d)$q \leftrightarrow p$

3. a)除非 $\neg p$ 为假，即 p 为真，否则命题不会为假。如果 p 为真，q 为真，那么 $\neg q \wedge (p \to q)$ 为假，蕴含为真。如果 p 为真而 q 为假，那么 $p \to q$ 为假，所以 $\neg q \wedge (p \to q)$ 仍为假，蕴含还是为真。

   b)除非 q 为假，否则命题不会为假。如果 q 为假，p 为真，那么 $(p \vee q) \wedge \neg p$ 为假，蕴含为真。若 q 为假，p 为假，那么 $(p \vee q) \wedge \neg p$ 也为假，蕴含仍为真。

5. $\neg q \to \neg p$；$p \to q$；$\neg p \to \neg q$。

7. $(p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s)$

9. 使用显而易见的字母，将这些语句翻译成符号，得到 $\neg t \to \neg g$，$\neg g \to \neg q$，$r \to q$ 和 $\neg t \wedge r$。假定这些语句一致。第四个语句表明 $\neg t$ 必为真。因此对第一个语句，由假言推理可知 $\neg g$ 为真，因此(从第二个语句)可知 $\neg q$ 为真。同样，第四个语句说明 r 必为真，对第三个语句，由假言推理 q 为真。这是一个矛盾：$q \wedge \neg q$。因此这些语句不一致。

11. Brenda

13. 这些前提条件不能同时为真，因为他们是互相矛盾的。因此，由定义可知，只要所有的前提条件为真，结论也必为真。由于前提条件不能同时为真，因此我们不能得出结论为真。

15. a)F　b)T　c)F　d)T　e)F　f)T

17. 很多答案是可能的。其中一个例子就是美国参议员。

19. $\forall x \exists y \exists z (y \neq z \wedge \forall w (P(w, x) \leftrightarrow (w = y \vee w = z)))$

21. a)$\neg \exists x P(x)$

    b)$\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \to y = x))$

    c)$\exists x_1 \exists x_2 (P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge x_1 \neq x_2 \wedge \forall y (P(y) \to (y = x_1 \vee y = x_2)))$

    d)$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \forall y (P(y) \to (y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3)))$

23. 假定 $\exists x (P(x) \to Q(x))$ 为真。那么或者对某个 x_0，$Q(x_0)$ 为真，这时 $\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$ 为真；或者有某个 x_0，$P(x_0)$ 为假，这时 $\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$ 也为真。反过来，假定 $\exists x (P(x) \to Q(x))$ 为假。这表明 $\forall x (P(x) \wedge \neg Q(x))$ 为真，即 $\forall x P(x)$ 为真，$\forall x (\neg Q(x))$ 也为真。后一命题等价于 $\neg \exists x Q(x)$，因此 $\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$ 为假。

25. 不。

27. $\forall x \forall z \exists y T(x, y, z)$，其中 $T(x, y, z)$ 为"学生 x 已选修 z 系的 y 课"，相应的论域是班上所有学生的集合，这所大学开设的所有课程的集合，以及数学学院所有系的集合。

29. $\exists ! x \exists ! y T(x, y)$，$\exists x \forall z ((\exists y \forall w (T(z, w) \leftrightarrow w = y)) \leftrightarrow z = x)$。其中 $T(x, y)$ 的含义是学生 x 选修 y 课，相应的论域是班上所有学生的集合。

31. 由全称量词实例化得 $P(a) \to Q(a)$，$Q(a) \to R(a)$。

33. 在此给出间接证明，证明若 $\sqrt{x}$ 是有理数，则 x 是有理数，假设 $x \geqslant 0$。假定 $\sqrt{x} = p/q$ 是有理数，$q \neq 0$。则 $x = (\sqrt{x})^2 = p^2/q^2$ 也是有理数(q^2 也是非零的)。

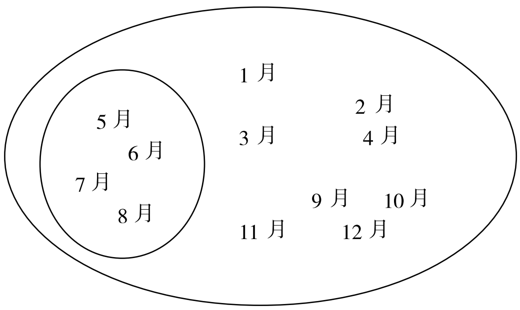
35. 通过令 $m = 10^{500} + 1$，可以给出构造性证明。则 $m^2 = (10^{500} + 1)^2 > (10^{500})^2 = 10^{1000}$。

37. 23 不能写为 8 个立方体的和。
39. 223 不能写为 36 个 5 次幂的和。

第 2 章

2.1 节

1. a)$\{-1, 1\}$　b)$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
   c)$\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$　d)$\varnothing$
2. a)相等　b)不等　c)不等
3. a)是　b)不是　c)是
   d)不是　e)不是　f)不是
4. a)False　b)False　c)False
   d)True　e)False　f)False　g)True
5. a)True　b)True　c)False
   d)True　e)True　f)False
6.



7. 在某个区域中的小圆点表示那些区域不为空。
8. 假定 $x\in A$。由于 $A\subseteq B$，则 $x\in B$。由于 $B\subseteq C$，则 $x\in C$。由 $x\in A$ 导出 $x\in C$，所以 $A\subseteq C$。
9. a)1　b)1　c)2　d)3
10. a)$\{\varnothing, \{a\}\}$　b)$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
    c)$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
11. a)8　b)16　c)2
12. a)$\{(a, y), (b, y), (c, y), (d, y), (a, z), (b, z), (c, z), (d, z)\}$
    b)$\{(y, a), (y, b), (y, c), (y, d), (z, a), (z, b), (z, c), (z, d)\}$
13. 三元组(a, b, c)的集合，其中 a 是航线，b 和 c 是城市。
14. $\varnothing\times A=\{(x, y)\mid x\in\varnothing\wedge y\in A\}=\varnothing=\{(x, y)\mid x\in A\wedge y\in\varnothing\}=A\times\varnothing$
15. mn
16. $A\times B\times C$ 的元素是由三元组(a, b, c)构成。其中 $a\in A$，$b\in B$，$c\in C$，而$(A\times B)\times C$ 的元素形如$((a, b), c)$有序对。有序对的第一部分又是一个有序对。
17. a)实数的平方绝不会是-1。为真。　b)存在某个整数它的平方等于 2。为假。
    c)每个整数的平方都是正的。为假。　d)存在某个实数等于它自身的平方。为真。
18. a)$\{-1, 0, 1\}$　b)$\mathbf{Z}-\{0, 1\}$　c)$\varnothing$
19. 我们必须证明$\{\{a\}, \{a, b\}\}=\{\{c\}, \{c, d\}\}$成立的充分必要条件是 $a=c$ 且 $b=d$。显然条件是充分的。为证必要性，假定这两个集合相等。首先考虑 $a\neq b$ 的情况，这时$\{\{a\}, \{a, b\}\}$恰含两个元素，其中的一个包含一个元素。这样$\{\{c\}, \{c, d\}\}$也必须有同样的性质，所以 $c\neq d$，且$\{c\}$是两个元素中只含一个元素的那一个。于是$\{a\}=\{c\}$，也就是 $a=c$。含两个元素的集合$\{a, b\}$和$\{c, d\}$也必须相等。由于 $a=c$，且 $a\neq b$，所以 $b=d$。其次假定 $a=b$。于是$\{\{a\}, \{a, b\}\}=\{\{a\}\}$，这是只含一个元素的集合。于是$\{\{c\}, \{c, d\}\}$也只含一个元素，这只有在 $c=d$ 时才有可能，此时该集合为$\{\{c\}\}$。从而 $a=c$ 且 $b=d$。
20. 令 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$。把 S 的每个子集 S'都用长度为 n 的位串表示，位串中第 i 位为 1 的充分必要条件是 $a_i\in S$。为产生 S 的所有子集，列出长度为 n 的所有 2^n 个位串(例如，按增序)，再写下相应的子集。

2.2 节

1. a)住处离校不超过 1 英里且走路上学的学生集合。

   b)住处离校不超过 1 英里或走路上学的学生之集合。

   c)住处离校不超过 1 英里但不走路上学的学生集合。

   d)走路上学但住处离校超过 1 英里的学生集合。

2. a)$\{0,1,2,3,4,5,6\}$　　b)$\{3\}$　　c)$\{1,2,4,5\}$　　d)$\{0,6\}$

3. $\overline{\overline{A}}=\{x\mid\neg(x\in\overline{A})\}=\{x\mid\neg(\neg x\in A)\}=\{x\mid x\in A\}=A$

4. a)$A\cup U=\{x\mid x\in A\vee x\in U\}=\{x\mid x\in A\vee \mathrm{T}\}=\{x\mid \mathrm{T}\}=U$

   b)$A\cap\varnothing=\{x\mid x\in A\wedge x\in\varnothing\}=\{x\mid x\in A\wedge \mathrm{F}\}=\{x\mid \mathrm{F}\}=\varnothing$

5. a)$A\cup\overline{A}=\{x\mid x\in A\vee x\notin A\}=U$

   b)$A\cap\overline{A}=\{x\mid x\in A\wedge x\notin A\}=\varnothing$

6. a)$A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}=\{x\mid x\in B\vee x\in A\}=B\cup A$

   b)$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}=\{x\mid x\in B\wedge x\in A\}=B\cap A$

7. 假定 $x\in A\cap(A\cup B)$。则由交集的定义 $x\in A$ 且 $x\in A\cup B$。由于 $x\in A$，我们就已证明了等式左边是右边的子集。反之，令 $x\in A$。则由并集的定义，$x\in A\cup B$。因此由交集的定义 $x\in A\cap(A\cup B)$，所以右边是左边的子集。

8. a)$x\in\overline{(A\cup B)}\equiv x\notin(A\cup B)\equiv\neg(x\in A\vee x\in B)$

   $\equiv\neg(x\in A)\wedge\neg(x\in B)\equiv x\notin A\wedge x\notin B\equiv x\in\overline{A}\wedge x\in\overline{B}\equiv x\in\overline{A}\cap\overline{B}$

   b)

A	B	$A\cup B$	$\overline{(A\cup B)}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\cap\overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

9. a)$x\in\overline{A\cap B\cap C}\equiv x\notin A\cap B\cap C\equiv x\notin A\vee x\notin B\vee x\notin C\equiv x\in\overline{A}\vee x\in\overline{B}\vee x\in\overline{C}\equiv x\in\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$

   b)

A	B	C	$A\cap B\cap C$	$\overline{(A\cap B\cap C)}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$
1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

10. 两边都等于$\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$。

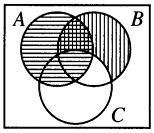
11. $x\in A\cup(B\cup C)\equiv(x\in A)\vee(x\in(B\cup C))\equiv(x\in A)\vee(x\in B\vee x\in C)\equiv(x\in A\vee x\in B)\vee(x\in C)\equiv x\in(A\cup B)\cup C$

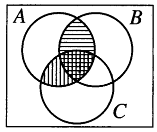
12. $x\in A\cup(B\cap C)\equiv(x\in A)\vee(x\in(B\cap C))\equiv(x\in A)\vee(x\in B\wedge x\in C)\equiv(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)\equiv x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

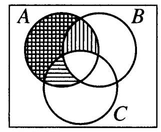
13. a)$\{4,6\}$　　b)$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

    c)$\{4,5,6,8,10\}$　　d)$\{0,2,4,5,6,7,8,9,10\}$

14. a)双阴影部分是所要求的集合。 b)所要求的集合是整个阴影部分。 c)所要求的集合是整个阴影部分。







15. a)$B\subseteq A$ b)$A\subseteq B$ c)$A\cap B=\varnothing$
    d)没什么可说，因为它总是成真 e)$A=B$
16. $A\subseteq B\equiv\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\equiv\forall x(x\notin B\rightarrow x\notin A)\equiv\forall x(x\in\overline{B}\rightarrow x\in\overline{A})\equiv\overline{B}\subseteq\overline{A}$
17. 主修计算机科学而不主修数学，或主修数学而不主修计算机科学的所有学生的集合。
18. $(A\cup B)-(A\cap B)$的元素是属于A和B的并集却不属于A和B的交集的元素，也就是说它属于A或属于B，但不同时属于A和B。这正是元素属于$A\oplus B$的含义。
19. a)$A\oplus A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$ b)$A\oplus\varnothing=(A-\varnothing)\cup(\varnothing-A)=A\cup\varnothing=A$
    c)$A\oplus U=(A-U)\cup(U-A)=\varnothing\cup\overline{A}=\overline{A}$ d)$A\oplus\overline{A}=(A-\overline{A})\cup(\overline{A}-A)=A\cup\overline{A}=U$
20. $B=\varnothing$
21. 是的
22. 是的
23. a)$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ b)$\{1\}$
24. a)A_n b)$\{0, 1\}$
25. a)$\mathbf{Z}$，$\{-1, 0, 1\}$ b)$\mathbf{Z}-\{0\}$，$\varnothing$ c)$\mathbf{R}$，$[-1, 1]$ d)$[1, \infty)$，$\varnothing$
26. a)$\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$ b)$\{2, 4, 5, 6, 7\}$ c)$\{1, 10\}$
27. 如果第一个位串的第i位是1而第二个位串的第i位为0，则两个集合之差的位串的第i位是1；否则为0。
28. a)11 1110 0000 0000 0000 0000 0000 ∨ 01 1100 1000 0000 0100 0101 0000＝11 1110 1000 0000 0100 0101 0000，代表$\{a, b, c, d, e, g, p, t, v\}$
    b)11 1110 0000 0000 0000 0000 0000 ∧ 01 1100 1000 0000 0100 0101 0000＝01 1100 0000 0000 0000 0000 0000，代表$\{b, c, d\}$
    c)(11 1110 0000 0000 0000 0000 0000 ∨ 00 0110 0110 0001 1000 0110 0110) ∧ (01 1100 1000 0000 0100 0101 0000 ∨ 00 1010 0010 0000 1000 0010 0111)
    ＝11 1110 0110 0001 1000 0110 0110 ∧ 01 1110 1010 0000 1100 0111 0111
    ＝01 1110 0010 0000 1000 0110 0110，代表$\{b, c, d, e, i, o, t, u, x, y\}$
    d)11 1110 0000 0000 0000 0000 0000 ∨ 01 1100 1000 0000 0100 0101 0000 ∨ 00 1010 0010 0000 1000 0010 0111 ∨ 00 0110 0110 0001 1000 0110 0110＝11 1110 1110 0001 1100 0111 0111，代表$\{a, b, c, d, e, g, h, i, n, o, p, t, u, v, x, y, z\}$
29. a)$\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$ b)$\{\varnothing\}$
    c)$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ d)$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
30. a)$\{3\cdot a, 3\cdot b, 1\cdot c, 4\cdot d\}$ b)$\{2\cdot a, 2\cdot b\}$
    c)$\{1\cdot a, 1\cdot c\}$ d)$\{1\cdot b, 4\cdot d\}$ e)$\{5\cdot a, 5\cdot b, 1\cdot c, 4\cdot d\}$
31. $\overline{F}=\{0.4\ \text{Alice}, 0.1\ \text{Brian}, 0.6\ \text{Fred}, 0.9\ \text{Oscar}, 0.5\ \text{Rita}\}$
    $\overline{R}=\{0.6\ \text{Alice}, 0.2\ \text{Brian}, 0.8\ \text{Fred}, 0.1\ \text{Oscar}, 0.3\ \text{Rita}\}$
32. $F\cap R=\{0.4\ \text{Alice}, 0.8\ \text{Brian}, 0.2\ \text{Fred}, 0.1\ \text{Oscar}, 0.5\ \text{Rita}\}$

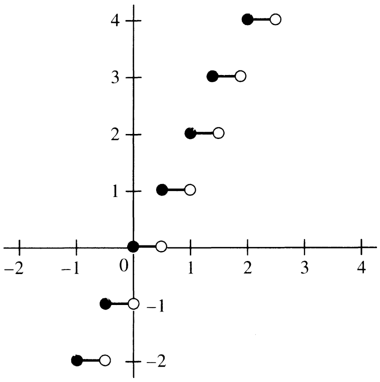
2.3 节

1. a) $f(0)$无定义。 b)对$x<0$，$f(x)$无定义。
   c)对x的每个值都指派了两个值，$f(x)$不符合函数定义。
2. a)不是函数 b)是函数 c)不是函数
3. a)整数集合 b)非负偶数集合
   c)不超过7的非负整数集合 d)正整数平方的集合＝$\{1, 4, 9, 16, \cdots\}$
4. a) $\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+$；$\mathbf{Z}^+$ b)$\mathbf{Z}^+$；$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
   c)位串集合；$\mathbf{N}$ d)位串集合；$\mathbf{N}$

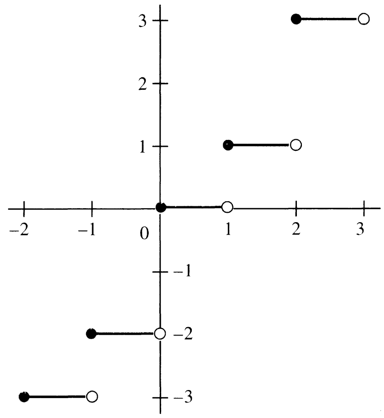
5. a) 1　b) 0　c) 0　d) -1　e) 3　f) -1　g) 2　h) 1
6. a)映上　b)不映上　c)映上　d)不映上　e)映上
7. a) $x\geqslant 0$ 时函数 $f(x)=3x+1$，$x<0$ 时函数 $f(x)=-3x+2$
   b) $f(x)=|x|+1$
   c) $x\geqslant 0$ 时 $f(x)=2x+1$，$x<0$ 时 $f(x)=-2x$
   d) $f(x)=x^2+1$
8. a)是　b)不是　c)是　d)不是
9. 假定 f 严格递减。这意味着当 $x<y$ 时，$f(x)>f(y)$。要证明 g 严格递增，假定 $x<y$。则 $g(x)=1/f(x)<1/f(y)=g(y)$。反过来，假定 g 严格递增。这意味着当 $x<y$ 时，$g(x)<g(y)$。要证明 f 严格递减，假定 $x<y$。则 $f(x)=1/g(x)>1/g(y)=f(y)$。
10. 很多答案是可能的，一个例子就是 $f(x)=17$。
11. 函数不是一对一的，因此它不存在反函数。在限制域上，该函数是非负实数域上的同一函数。
12. a) $f(S)=\{0，1，3\}$　b) $f(S)=\{0，1，3，5，8\}$
    c) $f(S)=\{0，8，16，40\}$　d) $f(S)=\{1，12，33，65\}$
13. a)令 x 和 y 为 A 中不同的元素。由于 g 是一对一的，$g(x)$和 $g(y)$是 B 中不同的元素。又因为 f 是一对一的，$f(g(x))=(f\circ g)(x)$和 $f(g(y))=(f\circ g)(y)$是 C 中不同元素。因而 $f\circ g$ 是一对一的。
    b)令 $y\in C$。因为 f 是映上的，对某个 $b\in B$，$y=f(b)$。又因为 g 是映上的，对某个 $x\in A$，$b=g(x)$。因此 $y=f(b)=f(g(x))=(f\circ g)(x)$。由此知 $f\circ g$ 是映上的。
14. 不是。例如，假定 $A=\{a\}$，$B=\{b，c\}$，$C=\{d\}$。令 $g(a)=b$，$f(b)=d$，$f(c)=d$，于是 f 和 $f\circ g$ 为映上的，但 g 不是。
15. f 是一对一的，因为 $f(x_1)=f(x_2)\rightarrow ax_1+b=ax_2+b\rightarrow ax_1=ax_2\rightarrow x_1=x_2$。
    f 是映上的，因为 $f((y-b)/a)=y$，$f^{-1}(y)=(y-b)/a$。
16. a) $\{x\mid 0\leqslant x<1\}$　b) $\{x\mid -1\leqslant x<2\}$　c) $\varnothing$
17. $f^{-1}(\overline{S})=\{x\in A\mid f(x)\notin S\}=\overline{\{x\in A\mid f(x)\in S\}}=\overline{f^{-1}(S)}$
18. 令 $x=\lfloor x\rfloor+\varepsilon$，其中 ε 为实数，$0\leqslant\varepsilon<1$。若 $\varepsilon<\frac{1}{2}$，那么 $\lfloor x\rfloor-1<x-\frac{1}{2}<\lfloor x\rfloor$，所以 $\lceil x-1/2\rceil=\lfloor x\rfloor$ 且这是最接近 x 的整数。若 $\varepsilon>\frac{1}{2}$，那么 $\lfloor x\rfloor<x-\frac{1}{2}<\lfloor x\rfloor+1$，所以 $\lceil x-1/2\rceil=\lfloor x\rfloor+1$ 且这是最接近 x 的整数。若 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，那么 $\lceil x-1/2\rceil=\lfloor x\rfloor$，这是围绕 x 且到 x 的距离相等的两个整数中较小的一个。
19. 把实数 x 写成 $\lfloor x\rfloor+\varepsilon$，其中 ε 是实数，$0\leqslant\varepsilon<1$。因为 $\varepsilon=x-\lfloor x\rfloor$，所以 $0\leqslant-\lfloor x\rfloor<1$，由此直接得前两个不等式 $x-1<\lfloor x\rfloor$ 和 $\lfloor x\rfloor\leqslant x$。对另两个不等式，把 x 写成 $x=\lceil x\rceil-\varepsilon'$，其中 $0\leqslant\varepsilon'<1$。于是 $0\leqslant\lceil x\rceil-x<1$，从而立即得到想要的不等式。
20. a)若 $x<n$，由于 $\lfloor x\rfloor\leqslant x$，所以 $\lfloor x\rfloor<n$。假定 $x\geqslant n$，由底函数的定义知 $\lfloor x\rfloor\geqslant n$。这表明如果 $\lfloor x\rfloor<n$，那么 $x<n$。
    b)若 $n<x$，那么由于 $x\leqslant\lceil x\rceil$，$n\leqslant\lceil x\rceil$。假定 $n\geqslant x$，由顶函数的定义知 $\lceil x\rceil\leqslant n$。这表明如果 $n<\lceil x\rceil$，那么 $n<x$。
21. 如果 n 为偶数，则对某个整数 k 有 $n=2k$。因此 $\lfloor n/2\rfloor=\lfloor k\rfloor=k=n/2$。
    如果 n 是奇数，则对某个整数 k 有 $n=2k+1$。因此 $\lfloor n/2\rfloor=\left\lfloor k+\frac{1}{2}\right\rfloor=k=(n-1)/2$。
22. 假定 $x\geqslant 0$。等式左边是 $\lceil -x\rceil$ 而右边是 $-\lfloor x\rfloor$。如果 x 是整数，那么两边都等于 $-x$。否则令 $x=n+\varepsilon$，其中 n 为自然数，ε 为实数，$0\leqslant\varepsilon<1$。那么 $\lceil -x\rceil=\lceil -n-\varepsilon\rceil=-n$，且 $-\lfloor x\rfloor=-\lfloor n+\varepsilon\rfloor=-n$，等式成立。若 $x<0$，那么只要用 $-x$ 代替 x，即可得到想证明的等式。
23. $\lceil b\rceil-\lfloor a\rfloor-1$
24. a) 1　b) 3　c) 126　d) 3600

25. a) 100　　b) 256　　c) 1030　　d) 30 200

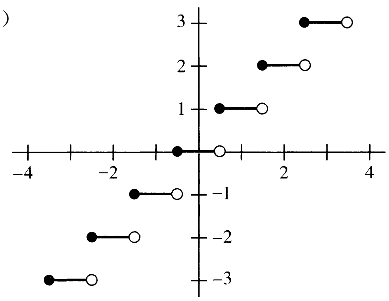
26.



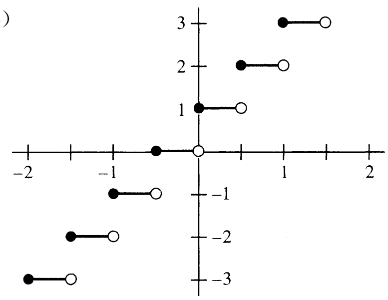
27.



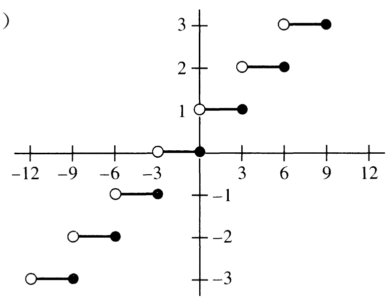
28. a)



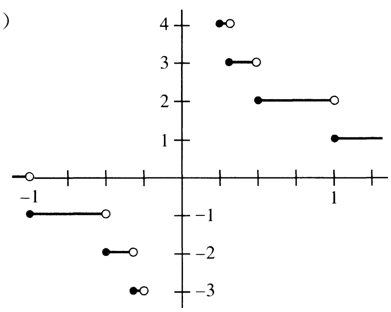
b)



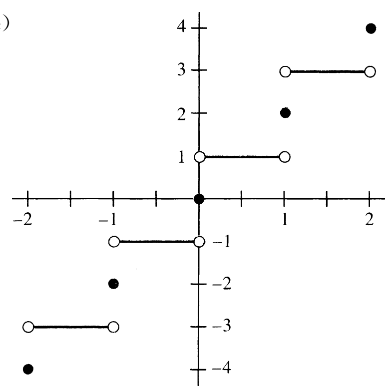
c)



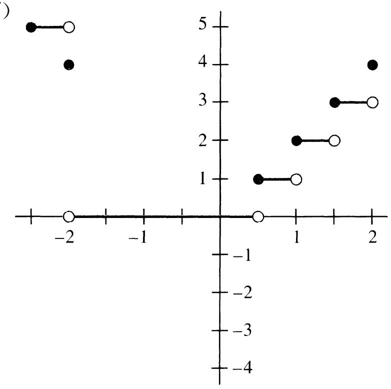
d)



e)



f)



g) 见部分(a)

29. $f^{-1}(y)=(y-1)^{1/3}$

30. a) $f_{A\cap B}(x)=1\leftrightarrow x\in A\cap B\leftrightarrow x\in A$ and $x\in B\leftrightarrow f_A(x)=1$ and $f_B(x)=1\leftrightarrow f_A(x)f_B(x)=1$

b) $f_{A\cup B}(x)=1\leftrightarrow x\in A\cup B\leftrightarrow x\in A$ or $x\in B\leftrightarrow f_A(x)=1$ or $f_B(x)=1\leftrightarrow f_A(x)+f_B(x)-f_A(x)f_B(x)=1$

c) $f_{\overline{A}}(x)=1\leftrightarrow x\in\overline{A}\leftrightarrow x\notin A\leftrightarrow f_A(x)=0\leftrightarrow 1-f_A(x)=1$

d) $f_{A\oplus B}(x)=1\leftrightarrow x\in A\oplus B\leftrightarrow(x\in A$ and $x\notin B)$ or $(x\notin A$ and $x\in B)\leftrightarrow f_A(x)+f_B(x)-2f_A(x)f_B(x)=1$

31. a)为真；因为$\lfloor x\rfloor$已经是整数，$\lceil\lfloor x\rfloor\rceil=\lfloor x\rfloor$。

b)为假；$x=\frac{1}{2}$是一个反例。

c)为真；如果 x 或 y 是整数，则差为 0。如果 x 和 y 都不是整数，则$x=n+\varepsilon$且 $y=m+\delta$，其中 n 和 m 是整数，ε 和 δ 是小于 1 的正实数。则 $m+n<x+y<m+n+2$，因此$\lceil x+y\rceil$或者为 $m+n+1$，或者为 $m+n+2$。因此，给定的表达式或者为$(n+1)+(m+1)-(m+n+1)=1$，或者为$(n+1)+(m+1)-(m+n+2)=0$。

d)为假；$x=\frac{1}{4}$且 $y=3$ 是一个反例。

e)为假；$x=\frac{1}{2}$是一个反例。

32. a)如果 x 是正整数，则两边相等。因此假定 $x=n^2+m+\varepsilon$，其中 n^2 是小于 x 的最大完全平方数，m 是非负整数，$0<\varepsilon\leqslant 1$。则$\sqrt{x}$和$\sqrt{\lfloor x\rfloor}=\sqrt{n^2+m}$ 均在 n 和 $n+1$ 之间，因此式子两边均等于 n。

b)如果 x 是正整数，则两边相等。因此假定 $x=n^2-m-\varepsilon$，其中 n^2 是大于 x 的最小完全平方数，m 是非负整数，$0<\varepsilon\leqslant 1$。则$\sqrt{x}$和$\sqrt{\lceil x\rceil}=\sqrt{n^2-m}$ 均在 $n-1$ 和 n 之间，因此式子两边都等于 n。

33. a)定义域是 $\mathbf{Z}$；伴域是 $\mathbf{R}$；定义区域是非零整数集；f 的未定义区域是$\{0\}$；不是全函数。

b)定义域是 $\mathbf{Z}$；伴域是 $\mathbf{Z}$；定义区域是 $\mathbf{Z}$；f 的未定义区域是$\varnothing$；全函数。

c)定义域是 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$；伴域是 $\mathbf{Q}$；定义区域是 $\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})$；$f$ 的未定义区域是 $\mathbf{Z}\times\{0\}$；不是全函数。

d)定义域是 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$；伴域是 $\mathbf{Z}$；定义区域是 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$；$f$ 的未定义区域是$\varnothing$；全函数。

e)定义域是 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$；伴域是 $\mathbf{Z}$；定义区域是$\{(m,n)\mid m>n\}$；f 的未定义区域是$\{(m,n)\mid m\leqslant n\}$；不是全函数。

34. a)由定义可知，如果说 S 的基数为 m，含义就是 S 有 m 个不同的元素。因此，我们给第 1 个对象赋值为 1，第 2 个赋值为 2，等等。这就是一个一对一的映射。

b)由 a)可知，存在一个 S 到$\{1,2,\cdots,m\}$的双射 f 和从 T 到 $\{1,2,\cdots,m\}$的双射，组合 $g^{-1}\circ f$ 就是所求的从 S 到 T 的双射。

35. 从公式显然可知，对于 $m+n$ 的固定值(例如 $m+n=x$)，函数的取值范围是从$(x-2)(x-1)/2+1$ 到$(x-2)(x-1)/2+(x-1)$，因为在这些条件下 m 可以取 1，2，3，…，$(x-1)$，并且在 $m+n$ 取固定值时公式中的第一项是固定的正整数。为了证明这个函数是一对一的且映上的，只须证明函数对于 $x+1$ 的取值范围，正好是函数对于不用的 x 的取值范围，即 $f(x-1,1)+1=f(1,x)$。我们有

$$f(x-1,1)+1=\frac{(x-2)(x-1)}{2}+(x-1)+1=\frac{x^2-x+2}{2}=\frac{(x-1)x}{2}+1=f(1,x)$$

2.4 节

1. a)3　　b)-1　　c)787　　d)2639

2. a)$a_0=2$，$a_1=3$，$a_2=5$，$a_3=9$　　b)$a_0=1$，$a_1=4$，$a_2=27$，$a_3=256$

c)$a_0=0$，$a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=1$　　d)$a_0=0$，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$

3. a)2，5，8，11，14，17，20，23，26，29

b)1，1，1，2，2，2，3，3，3，4

c)1，1，3，3，5，5，7，7，9，9

d)-1，-2，-2，8，88，656，4912，40064，362368，3627776

e)3，6，12，24，48，96，192，384，768，1536

f)1，1，2，3，5，8，13，21，34，55

g)1，2，2，3，3，3，3，3，4，4，4

h)3，3，5，4，4，3，5，5，4，3

4. 每一项都是前一项的 2 倍，第 n 项可以由前一项加 $n-1$ 得到。每项都是正整数，并且不是 3 的倍数。存在无限多种可能。
5. a)1 个 1 和 1 个 0，后面跟两个 1 和两个 0，然后接 3 个 1 和 3 个 0，等等。1，1，1
   b)以升序排列正整数，并且每个偶正整数出现 2 次；9，10，10
   c)奇数项是都是连续的 2 的幂，偶数项都是 0；32，0，64
   d)$a_n=3\cdot 2^{n-1}$；384，768，1536
   e)$a_n=15-7(n-1)=22-7n$；-34，-41，-48
   f)$a_n=(n^2+n+4)/2$；57，68，80
   g)$a_n=2n^3$；1024，1458，2000
   h)$a_n=n!+1$；362881，3628801，39916801
6. 在从 1，2，…，a_n 的所有整数中，a_n 是第 n 个正整数而不是一个完全平方项。非平方项是 a_1，a_2，…，a_n，平方项是 1^2，2^2，…，k^2，其中 k 是整数，并且满足 $k^2<n+k<(k+1)^2$。因此，$a_n=n+k$，并且满足 $k^2<a_n<(k+1)^2$。为了找 k，首先注意 $k^2<n+k<(k+1)^2$，那么 $k^2+1\leqslant n+k\leqslant(k+1)^2-1$。因此 $\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=k^2-k+1\leqslant n\leqslant k^2+k=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$。因此可得 $k-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<k+\frac{1}{2}$，得 $k=\{\sqrt{n}\}$ 并且 $a_n=n+k=n+\{\sqrt{n}\}$。
7. a)20　　b)11　　c)30　　d)511
8. a)1533　　b)510　　c)4923　　d)9842
9. a)21　　b)78　　c)18　　d)18
10. $\sum_{j=1}^{n}(a_j-a_{j-1})=a_n-a_0$
11. a)n^2　　b)$n(n+1)/2$
12. 15150
13. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}+\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)(m-(n+1)^2+1)$，其中 $n=\lfloor\sqrt{m}\rfloor-1$
14. a)0　　b)1680　　c)1　　d)1024
15. 34
16. a)可数，-1，-2，-3，-4，…　　b)可数，0，2，-2，4，-4，…
    c)不可数　　d)可数，0，7，-7，14，-14，…
17. a)可数：把 n 和 n 个 1 组成的位串相对应。
    b)可数：为了找到这样一个对应，沿例 20 中的路径，但是把前 3 行中的小数部分省略掉。
    c)不可数
    d)不可数
18. 假设 $A-B$ 是可数集。那么，因为 $A=(A-B)\cup B$，所以 A 的元素可以由 $A-B$ 的元素与 B 的元素交替形成的序列列出，这与 A 的不可数性矛盾。
19. 假设 B 是可数的，因此 B 中的元素可以表示为 b_1，b_2，b_3，…。由于 A 是 B 的子集，因此取集合 $\{b_n\}$ 中包含由集合 A 元素构成的子序列，可以表示为集合 A 的元素。由于 A 是不可数的，因此这是不可能的。
20. 给定由 A 到 B 的双射 f，由 C 到 D 的双射 g，$A\times C$ 到 $B\times D$ 的函数是一个双射，其值由 (a, c) 变为 $(f(a), g(c))$。
21. 假设 A_1，A_2，A_3，…是可数集，由于 A_i 是可数的，因此可以把其中的元素列举出来形如 a_{i1}，a_{i2}，a_{i3}，…，集合 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ 中的元素 a_{ij} 满足 $i+j=2$，$i+j=3$，$i+j=4$。
22. 长度为 m 的 01 位串的个数总和是 2^m 个。所有 01 位串构成的集合是长度为 m 的 01 位串构成集合的并，其中 $m=0$，1，2，…。由于可数个集合的并仍旧是可数的(参见练习 41)，因此，存在可数个 01 位串。
23. 对于任意有限字母表，都存在有限个长度为 n 的字符串，其中 n 为正整数。由练习 21 的结果表明，对任意给定的字母表，只有可数个字符串。原因是对于某一种语言来说，所有计算机程序组成的集合是有限字母表的所有字符串集合的子集。由练习 36 的结果可知，有限字母表的所有字符串组成的集合是一个可数集。因此其子集也是可数集。
24. 练习 23 证明只有可数个计算机程序。因此，只有可数个可计算函数。根据练习 46 的结果可知，存在不可数个函数，因此并不是所有的函数都是可计算的。

补充练习

1. a)$\overline{A}$　　b)$A\cap B$　　c)$A-B$　　d) $\overline{A}\cap\overline{B}$　　e) $A\oplus B$
3. 是
5. $A-(A-B)=A-(A\cap\overline{B})=A\cap(\overline{A\cap\overline{B}})=A\cap(\overline{A}\cup B)=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$
7. 令 $A=\{1\}$，$B=\varnothing$，$C=\{1\}$。那么$(A-B)-C=\varnothing$，但 $A-(B-C)=\{1\}$。
9. 不是。例如，令 $A=B=\{a, b\}$，$C=\varnothing$，$D=\{a\}$，那么$(A-B)-(C-D)=\varnothing-\varnothing=\varnothing$，但是$(A-C)-(B-D)=\{a, b\}-\{b\}=\{a\}$。
11. a) $|\varnothing|\leqslant|A\cap B|\leqslant|A|\leqslant|A\cup B|\leqslant|U|$
    b) $|\varnothing|\leqslant|A-B|\leqslant|A\oplus B|\leqslant|A\cup B|\leqslant|A|+|B|$
13. a)是，不是　　b)是，不是
    c)f 的反函数是 $f^{-1}(a)=3$，$f^{-1}(b)=4$，$f^{-1}(c)=2$，$f^{-1}(d)=1$；g 没有反函数。
15. 令 $f(a)=f(b)=1$，$f(c)=f(d)=2$，$S=\{a, c\}$，$T=\{b, d\}$，那么 $f(S\cap T)=f(\varnothing)=\varnothing$，但是 $f(S)\cap f(T)=\{1, 2\}\cap\{1, 2\}=\{1, 2\}$。
17. 令 $x\in A$，那么 $S_f(\{x\})=\{f(y)\mid y\in\{x\}\}=\{f(x)\}$，由于 $S_f=S_g$，因此可以得出$\{f(x)\}=\{g(x)\}$，必然可以得出 $f(x)=g(x)$。
19. 等式为真当且仅当 x 和 y 的小数部分之和小于 1。
21. 等式为真当且仅当要么 x 和 y 都是整数，要么 x 不是整数，并且 x 和 y 的小数部分之和小于等于 1。
23. 如果 x 是整数，那么$\lfloor x\rfloor+\lfloor m-x\rfloor=x+m-x=m$。否则，把 x 表示成它的整数部分和小数部分：$x=n+\varepsilon$，其中 $n=\lfloor x\rfloor$并且 $0<\varepsilon<1$。在这种情况下$\lfloor x\rfloor+\lfloor m-x\rfloor=\lfloor n+\varepsilon\rfloor+\lfloor m-n-\varepsilon\rfloor=n+m-n-1=m-1$。
25. 对于某个整数 k，$n=2k+1$，那么 $n^2=4k^2+4k+1$，$n^2/4=k^2+k+1/4$。因此$\lceil n^2/4\rceil=k^2+k+1$。但是$(n^2+3)/4=(4k^2+4k+1+3)/4=k^2+k+1$。
27. 令 $x=n+(r/m)+\varepsilon$，其中 n 是整数，r 是小于 m 的非负整数，ε 是实数，满足 $0\leqslant\varepsilon<1/m$。因此，左边式子为$\lfloor nm+r+m\varepsilon\rfloor=nm+r$；关于右边的式子，项$\lfloor x\rfloor$到$\lfloor x+(m+r-1)/m\rfloor$是 n，项$\lfloor x+(m-r)/m\rfloor$是 $n+1$，因此，右式为$(m-r)n+r(n+1)=nm+r$。
29. 101
31. $a_1=1$；$a_{n+1}=n\cdot a_{2n}$对于所有的 $n>0$，并且对于所有的 $n>0$ 有 $a_{2n}=n+a_{2n-1}$，后四项是 5346，5353，37471，37479。

第 3 章

3.1 节

1. a)5850　　b)343
2. a)4^{10}　　b)5^{10}
3. 42
4. 26^3
5. 676
6. 2^8
7. $n+1$(包含空串)
8. 475 255(包含空串)
9. 1 321 368 961
10. a)7：56，63，70，77，84，91，98
    b)5：55，66，77，88，99
11. a)128　　b)450　　c)9　　d)675　　e)450　　f)450　　g)225　　h)75
12. a)990　　b)500　　c)27
13. 3^{50}
14. 52 457 600
15. 20 077 200

16. a)37 822 859 361　b)8 204 716 800　c)40 159 050 880　d)12 113 640 000
e)171 004 205 215　f)72 043 541 640　g)6 230 721 635　h)223 149 655
17. a)0　b)120　c)720　d)2520
18. a)若 $n=1$，为 2；若 $n=2$，为 2；若 $n\geqslant 3$，为 0
b)对于 $n>1$，为 2^{n-2}；若 $n=1$，为 1　c)$2(n-1)$
19. $(n+1)^m$
20. 若 n 是偶数，为 $2^{n/2}$；若 n 是奇数，为 $2^{(n+1)/2}$
21. a)240　b)480　c)360
22. 352
23. 147
24. 33
25. a)9 920 671 339 261 325 541 376$\approx 9.9\times 10^{21}$
b)6 641 514 961 387 068 437 760$\approx 6.6\times 10^{21}$
c)9 920 671 339 261 325 541 376 秒，约等于 314 000 年
26. 7 104 000 000 000
27. 18
28. 17
29. 22
30. 设 $P(m)$是关于 m 个任务的求和法则。对于基础情形取 $m=2$，这就是两个任务的求和法则。现在假设 $P(m)$为真，考虑 $m+1$ 个任务，T_1，T_2，…，T_{m+1}，它们可以分别用 n_1，n_2，…，n_{m+1} 种方式完成，并且没有 2 个任务是同时做的。为了完成这些任务中的 1 个任务，我们可以完成前 m 个任务中的 1 个，或者完成任务 T_{m+1}。根据两个任务的求和法则，完成任务的方式数是完成前 m 个任务之一的方式数与 n_{m+1} 之和。由归纳假设，这就是 $n_1+n_2+\cdots+n_m+n_{m+1}$，这正是所求的。
31. $n(n-3)/2$

3.2 节

1. 因为有 6 门课，但是只有 5 个工作日，鸽巢原理证明至少有 2 门课排在同一天。
2. a)3　b)14
3. 当一个整数被 4 除时只有 4 种可能的余数，给定 5 个整数，由鸽巢原理知至少有 2 个整数有同样的余数。
4. 设 a，$a+1$，…，$a+n-1$ 是序列中的整数。因为 $0<(a+j)-(a+k)<n$，其中 $0\leqslant k<j\leqslant n-1$，所以整数 $(a+i)\bmod n$ 是不等的，$i=0$，1，2，…，$n-1$。由于$(a+i)\bmod n$ 有 n 个可能的值，且在这个集合中有 n 个不同的整数，每个值恰好取 1 次。所以序列中恰好有一个整数被 n 整除。
5. 4951
6. 点(a, b, c)和点(d, e, f)的连线的中点是$((a+d)/2, (b+e)/2, (c+f)/2)$。它有整数坐标，当且仅当 a 和 d 的奇偶性相同，b 和 e 的奇偶性相同，且 c 和 f 的奇偶性相同。因为奇偶性的 3 元组有 8 种可能[例如(偶，奇，偶)]，根据鸽巢原理 9 个点中至少有 2 个点有相同的奇偶性 3 元组。这 2 点连线中点有整数坐标。
7. a)将前 8 个正整数 2 个一组分成 4 组使得每组整数之和等于 9：{1，8}，{2，7}，{3，6}和{4，5}。如果从前 8 个整数中选 5 个整数，由鸽巢原理至少 2 个取自同一组。这 2 个整数之和等于 9，正如所求。
b)不正确。例如取{1，2，3，4}。
8. 4
9. 21 251
10. a)如果在这个班里一年级学生少于 9 个，二年级学生少于 9 个，三年级学生也少于 9 个，每个年级的学生都不超过 8 个，那么学生总数至多 24 个，这与班里有 25 个学生矛盾。
b)如果一年级学生少于 3 个，二年级学生少于 19 个，三年级学生少于 5 个，那么至多 2 个一年级学生，至多 18 个二年级学生，至多 4 个三年级学生，学生总数至多是 24，与班上有 25 个学生矛盾。
11. 4，3，2，1，8，7，6，5，12，11，10，9，16，15，14，13
12. **procedure** $long(a_1, \cdots, a_n$：正整数)

```
{首先找最长的递增子序列}
max:=0; set:=00…00{n 位}
for i:=1 to 2^n
begin
  last:=0; count:=0; OK:=true
  for j:=1 to n
  begin
    if set(j)=1 then
    begin
      if a_j>last then last:=a_j
      count:=count+1
     end
     else OK:=false
   end
   if count>max then
   begin
     max:=count
     best:=set
   end
   set:=set+1(二进制加)
end{max 是长度并且 best 给出这个序列}
{对于递减子序列重复进行，唯一不同的是用 a_j<last 代替 a_j>last 且用 last:=∞代替 last:=0}
```

13. 根据对称性我们只需证明第一个语句。设 A 是其中的一个人。A 在其他 9 个人中或至少有 4 个朋友，或至少有 6 个敌人(因为 $3+5<9$)。假设是第一种情况，B，C，D 和 E 是 A 的朋友。如果这些人中任有 2 个人是朋友，我们已经找到 3 个人彼此都是朋友。否则$\{B,C,D,E\}$是彼此都是敌人的 4 人集合。在第二种情况下，设$\{B,C,D,E,F,G\}$是 A 的敌人的集合。由例 11，在 B，C，D，E，F 和 G 中有 3 个人彼此都是朋友，或有 3 个人彼此都是敌人，这样，他们和 A 构成 4 人的彼此都是敌人的集合。
14. 我们需要证明两件事：如果我们有一组 n 个人，那么在他们中间一定可找到一对朋友，或者这些人的一个 n 元子集使得彼此都是敌人；并且存在一组 $n-1$ 个人，对于他们这是不可能的。对第一个陈述，若存在一对朋友，那么这个条件被满足，若不是，那么每一对人都是敌人，因此第二个条件被满足。对于第二个陈述，如果我们有 $n-1$ 个人，他们彼此都是敌人，那么既没有一对朋友，也没有他们的一个 n 元子集使得所有人彼此都是敌人。
15. 对于姓名的 3 个缩写字母和生日有 6 432 816 种可能性，因此，由鸽巢原理存在至少$\lceil 36\,000\,000/6\,432\,816\rceil=6$ 个人，他们姓名的 3 个缩写字母和生日都相同。
16. 18
17. 因为有 6 台计算机，连接到同一台计算机的其他机器数是 0～5 之间的整数，包含 0 和 5 在内。但是 0 和 5 不能同时出现。为此只需注意到下面的事实：如果某台计算机不与其他机器连接，那么没有 1 台计算机连接到所有其他的 5 台机器；如果某台计算机连接到所有其他的 5 台机器，那么就没有不与其他机器相连的计算机。因为 1 台计算机连接的机器数至多有 5 种可能，于是，由鸽巢原理在 6 台计算机中至少有 2 台连接的其他机器数相等。
18. 将计算机标号为 C_1 到 C_{100}，且将打印机标号为 P_1 到 P_{20}。如果对于 $k=1,2,\cdots,20$，我们把 C_k 连接到 P_k，并且把 C_{21} 到 C_{100} 的每台计算机连接到每台打印机，那么我们总共用了 $20+80\cdot 20=1620$ 条缆线。很显然这是足够的，因为如果计算机 C_1 到 C_{20} 需要打印机，那么它们可以使用同样标号的打印机；如果任何带有更高标号的计算机需要打印机，那么它们可以使用那些没被用到的打印机，因为它们被连接到所有的打印机。现在，我们必须证明 1619 条缆线是不够用的。因为有 1619 条缆线和 20 台打印机，每台打印机平均连接的计算机数是 1619/20，它小于 81。因此某台打印机一定连接少于 81 台的计算机。这意味着它连接到 80 台或者更少的计算机，因此存在 20 台计算机没有与它连接。如果所有这 20 台计算机同时需要一台打印机，那么它们的运气就不好了，因为它们连接到至多 19 台打印机。
19. 设 a_i 是到第 i 小时为止所完成的比赛数，那么 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{75}\leqslant 125$。进而有 $25\leqslant a_1+24<a_2+$

$24<\cdots<a_{75}+24\leqslant 149$。有 150 个数 a_1，a_2，…，a_{75}，a_1+24，a_2+24，…，$a_{75}+24$。由鸽巢原理至少有 2 个数相等。由于所有的 a_i 是不等的，所有的 a_i+24 也是不等的，因此对于某个 $i>j$ 有 $a_i=a_j+24$。于是在从第 $j+1$ 到第 i 小时之间恰有 24 场比赛。

20. 使用广义鸽巢原理，对于 $s\in S$，把 $|S|$ 个物体 $f(s)$ 放到 $|T|$ 个盒子里，T 中的每个元素一个盒子。

21. 设 d_j 是 $jx-N(jx)$，其中 $N(jx)$ 是距 jx 最近的整数，$1\leqslant j\leqslant n$。每个 d_j 是在 $-1/2$ 和 $1/2$ 之间的无理数。假设 n 是偶数，n 是奇数的情况更凌乱一些。考虑 n 个区间 $\{x \mid j/n<x<(j+1)/n\}$，$\{x \mid -(j+1)/n<x<-j/n\}$，$j=0$，1，…，$(n/2)-1$。如果对于某个 j，d_j 属于区间 $\{x \mid 0<x<1/n\}$ 或区间 $\{x \mid -1/n<x<0\}$，命题得证。如果不是，则因为有 $n-2$ 个区间和 n 个数 d_j，由鸽巢原理存在一个区间 $\{x \mid (k-1)/n<x<k/n\}$ 包含 d_r 和 d_s，其中 $r<s$。只要证明 $(s-r)x$ 距最近的整数在 $1/n$ 之内这个证明就完成了。

22. a) 假设对所有的 k，$i_k\leqslant n$，那么由广义鸽巢原理，数 i_1，i_2，…，i_{n^2+1} 中至少有 $\lceil (n^2+1)/n\rceil=n+1$ 个数相等。
    b) 如果 $a_{k_j}<a_{k_j+1}$，那么 a_{k_j} 和以 $a_{k_{j+1}}$ 开始长为 $i_{k_{j+1}}$ 的递增子序列组成的子序列与 $i_{k_j}=i_{k_j+1}$ 的事实矛盾。于是，$a_{k_j}>a_{k_j+1}$。
    c) 如果没有长度大于 n 的递增子序列，那么使用 a) 和 b)，从而得到长度为 $n+1$ 的递减子序列 $a_{k_1}>a_{k_2}>\cdots>a_{k_{n+1}}$。

3.3 节

1. abc，acb，bac，bca，cab，cba
2. 720
3. a) 120　b) 720　c) 8　d) 6720　e) 40 320　f) 3 628 800
4. 15 120
5. 1320
6. a) 210　b) 386　c) 848　d) 252
7. $2(n!)^2$
8. 65 780
9. $2^{100}-5051$
10. a) 1024　b) 45　c) 176　d) 252
11. a) 120　b) 24　c) 120　d) 24　e) 6　f) 0
12. 609 638 400
13. a) 94 109 400　b) 941 094　c) 3 764 376　d) 90 345 024　e) 114 072　f) 2328　g) 24　h) 79 727 040　i) 3 764 376　j) 109 440
14. a) 12 650　b) 303 600
15. a) 37 927　b) 18 915
16. a) 122 523 030　b) 72 930 375　c) 223 149 655　d) 100 626 625
17. 54 600
18. 45
19. 912
20. 11 232 000
21. 13
22. 873

3.4 节

1. $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$
2. $x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$
3. 101
4. $-2^{10}\binom{19}{9}=-94\ 595\ 072$

5. $-2^{101}3^{99}\binom{200}{99}$

6. 若 $k\equiv 2(\mathrm{mod}3)$ 且 $-100\leqslant k\leqslant 200$，为 $(-1)^{(200-k)/3}\binom{100}{(200-k)/3}$，否则为 0

7. 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

8. k 从 0 到 n 的所有正数 $\binom{n}{k}$ 的和是 2^n，因此它们中的每一项都不大于这个和。

9. $\binom{n}{k}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2}\leqslant\dfrac{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}{2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}=n^k/2^{k-1}$

10. $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}+\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}=\dfrac{n!}{k!\,(n-k+1)!}[k+(n-k+1)]=\dfrac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}=\binom{n+1}{k}$

11. a)我们证明每边计数了从一个 n 元素集合中选一个 k 个元素的子集和这个子集的一个特殊元素的方法数。

对于左边，首先选择这个 k 子集[这可以用 $\binom{n}{k}$ 种方法做到]，然后在这个子集的 k 个元素中选择一个元素作为特殊的元素(这可以用 k 种方法做到)。对于右边，首先从整个 n 元素集合中选择一个特殊的元素[这可以用 n 种方法做到]，然后从剩下的 $n-1$ 个元素中选择这个子集的剩下的 $k-1$ 个元素(这可以用 $\binom{n-1}{k-1}$ 种方法做到)。

b) $k\binom{n}{k}=k\cdot\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}=\dfrac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}=n\binom{n-1}{k-1}$

12. $\binom{n+1}{k}=\dfrac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}=\dfrac{(n+1)}{k}\dfrac{n!}{(k-1)!\,[n-(k-1)]!}=(n+1)\binom{n}{k-1}/k$

这个恒等式与 $\binom{n}{0}=1$ 一起给出了一个递归定义。

13. $\binom{2n}{n+1}+\binom{2n}{n}=\binom{2n+1}{n+1}=\dfrac{1}{2}\left[\binom{2n+1}{n+1}+\binom{2n+1}{n+1}\right]=\dfrac{1}{2}\left[\binom{2n+1}{n+1}+\binom{2n+1}{n}\right]=\dfrac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$

14. a) $\binom{n+r+1}{r}$ 通过选择 0 的位置计数了含 r 个 0 和 $n+1$ 个 1 的序列个数。另一方面，假设第 $j+1$ 项是等于 1 的最后一项，因此 $n\leqslant j\leqslant n+r$。一旦确定了最后一个 1 的位置，我们就可以确定在最后一个 1 前边的 j 个位置中有哪些位置放 0，在这个范围内有 n 个 1 和 $j-n$ 个 0。根据求和法则有 $\sum_{j=n}^{n+r}\binom{j}{j-n}=\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}$ 种方式做这件事。

b)设 $P(r)$ 是需证明的命题。基础步骤是等式 $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$，它就是 $1=1$。假设 $P(r)$ 为真，那么 $\sum_{k=0}^{r+1}\binom{n+k}{k}=\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}+\binom{n+r+1}{r+1}=\binom{n+r+1}{r}+\binom{n+r+1}{r+1}=\binom{n+r+2}{r+1}$，由归纳假设和帕斯卡等式得证。

15. 首先以 n 种不同的方式选择领导，然后以 2^{n-1} 种方式选择委员会的其他成员，于是有 $n2^{n-1}$ 种方式选择委员会及其领导。另一方面，选择一个 k 人委员会的方式数是 $\binom{n}{k}$。一旦我们选择了 k 个人的委员会，存在 k 种方式选择它的领导，于是有 $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$ 种方式选择这个委员会及其领导。从而有 $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$。

16. 设这个集合有 n 个元素。由推论 2 有 $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$。从而得到 $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+$

$\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$。左边给出了具有偶数个元素的子集个数，且右边给出了具有奇数个元素的子集个数。

17. a)一条所求的路径由 m 次向右的移动和 n 次向上的移动构成。每一条这种路径可以由一个 m 个 0 和 n 个 1 的 $m+n$ 位二进制串表示，其中 0 表示一次向右的移动，1 表示一次向上的移动。

    b)恰包含 n 个 1 的 $m+n$ 位二进制串个数等于 $\binom{m+n}{n}=\binom{m+n}{m}$，因为可以通过指定 n 个 1 的位置或指定 m 个 0 的位置确定这样的串。

18. 练习 17 所描述的 n 步长的路径条数等于 2^n，就是 n 位二进制串的个数。另一方面，练习 17 中所描述的 n 步长的路径一定在坐标之和等于 n 的某个点结束，比如说$(n-k, k)$点，其中 k 在 0 和 n 之间，包含 0 和 n 在内。由练习 17，这种在$(n-k, k)$点结束的路径数等于 $\binom{n-k+k}{k}=\binom{n}{k}$。于是 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$。

19. 练习 17 所描述的从(0，0)到$(n+1, r)$的路径数等于 $\binom{n+r+1}{r}$。但是这种路径由向上走 j 步开始，其中 j 满足 $0\leqslant j\leqslant r$。由向上走 j 步开始的这种路径数等于练习 17 所描述的从$(1, j)$到$(n+1, r)$的路径数，而这又与从(0，0)到$(n, r-j)$的路径数一样，根据练习 17 它等于 $\binom{n+r-j}{r-j}$。因为 $\sum_{j=0}^{r}\binom{n+r-j}{r-j}=\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}$，从而 $\sum_{k=1}^{r}\binom{n+k}{k}=\binom{n+r+1}{r}$。

20. a) $\binom{n+1}{2}$　　b) $\binom{n+2}{3}$　　c) $\binom{2n-2}{n-1}$　　d) $\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}$

    e)在帕斯卡三角的第 n 行中的最大的奇数项　　f) $\binom{3n-3}{n-1}$

3.5 节

1. 243
2. 26^6
3. 125
4. 35
5. a)1716　　b)50 388　　c)2 629 575　　d)330　　e)9724
6. 9
7. 4 504 501
8. a)10 626　　b)1365　　c)11 649　　d)106
9. 2520
10. 302 702 400
11. 3003
12. 7 484 400
13. 30 492
14. $C(59, 50)$
15. 35
16. 83 160
17. 63
18. 19 635
19. 210
20. 27 720
21. $52!/(7!^5 17!)$
22. $24\cdot 13^4/(52\cdot 51\cdot 50\cdot 49)$
23. a)$C(k+n-1, n)$　　b)$(k+n-1)!/(k-1)!$

24. 对于第 1 个盒子有 $C(n, n_1)$ 种方式选择 n_1 个物体。一旦选了这些物体以后，对于第 2 个盒子有 $C(n-n_1, n_2)$ 种方式选择物体。类似地，对于第 3 个盒子有 $C(n-n_1-n_2, n_3)$ 种方式选择物体。按照这种方式继续下去直到有 $C(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}, n_k)=C(n_k, n_k)=1$ 种方式选择最后一个盒子的物体(由于 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$)。由乘积法则，构成全部分配的方式数是 $C(n, n_1)C(n-n_1, n_2)C(n-n_1-n_2, n_3)\cdots C(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}, n_k)$，它等于 $n!/(n_1!\,n_2!\cdots n_k!)$，正如直接化简所显示的。
25. a)由于 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_r$，从而 $x_1+0<x_2+1<\cdots<x_r+r-1$。这个不等式是严格的，因为只要 $x_j \leqslant x_{j+1}$ 就有 $x_j+j-1<x_{j+1}+j$。因为 $1 \leqslant x_j \leqslant n+r-1$，这个序列是由从 T 中选择 r 个不同的元素构造出来的。
    b)假设 $1 \leqslant x_1<x_2<\cdots<x_r \leqslant n+r-1$。令 $y_k=x_k-(k-1)$。那么不难看出对于 $k=1, 2, \cdots, r-1$ 有 $y_k \leqslant y_{k+1}$，且对于 $k=1, 2, \cdots, r$ 有 $1 \leqslant y_k \leqslant n$。从而$\{y_1, y_2, \cdots, y_k\}$是 S 的允许重复的 r-组合。
    c)从 a)和 b)得出，在 S 的允许重复的 r-组合与集合 T 的具有 $n+r-1$ 个元素的 r-组合之间存在一一对应。可以断言存在着 $C(n+r-1, r)$ 个 S 的允许重复的 r-组合。
26. 65
27. 65
28. 2
29. 3
30. a)150　　b)25　　c)6　　d) 2
31. 90 720
32. 在展开式中的项形如 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$，其中 $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$。产生这样的项是从 n_1 个因式中选择了 x_1，从 n_2 个因式中选择了 x_2，从 n_m 个因式中选择了 x_m，这可以用 $C(n; n_1, n_2, \cdots, n_m)$ 种方式做到，因为一种选择就是 n_1 个标签“1”，n_2 个标签“2”，…和 n_m 个标签“m”的排列。
33. 2520

3.6 节

1. 14532，15432，21345，23451，23514，31452，31542，43521，45213，45321
2. a)2134　　b)54132　　c)12534　　d)45312　　e)6714253　　f)31542678
3. 1234，1243，1324，1342，1423，1432，2134，2143，2314，2341，2413，2431，3124，3142，3214，3241，3412，3421，4123，4132，4213，4231，4312，4321
4. {1，2，3}，{1，2，4}，{1，2，5}，{1，3，4}，{1，3，5}，{1，4，5}，{2，3，4}，{2，3，5}，{2，4，5}，{3，4，5}
5. 表示下一个最大的 r-组合的二进制串一定与表示原来的 r-组合的二进制串在第 i 位不同，因为第 $i+1$，…，r 位被最大可能的数占据。此外，如果我们想要一个比原来的组合大的组合，a_i+1 是可以放在第 i 位的最小可能的数。那么 $a_i+2, \cdots, a_i+r-i+1$ 是从第 $i+1$ 到 r 位所允许的最小的数。于是我们生成了下一个 r-组合。
6. 123，132，213，231，312，321，124，142，214，241，412，421，125，152，215，251，512，521，134，143，314，341，413，431，135，153，315，351，513，531，145，154，415，451，514，541，234，243，324，342，423，432，235，253，325，352，523，532，245，254，425，452，524，542，345，354，435，453，534，543
7. 我们将通过证明它有一个逆来证明这是一个双射。给定一个小于 $n!$ 的正整数，设 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 是它的康托数字。把 n 放在位置 $n-a_{n-1}$，因此很清楚 a_{n-1} 是在排列中跟在 n 后面且小于 n 的整数个数。然后把 $n-1$ 放在空位置 $(n-1)-a_{n-2}$，这里我们已经标号了空位置 $1, 2, \cdots, n-1$(除去 n 已经在的位置)。继续下去直到 1 放在留下的唯一的空位置。因为我们已经构造了一个逆，这个对应是一个双射。

补充练习

1. a)151 200　　b)1 000 000　　c)210　　d)5005
3. 3^{100}
5. 24 600
7. a)4060　　b)2688　　c)25 009 600
9. a)192　　b)301　　c)300　　d)300

11. 639
13. 最大可能的和是 240，且最小可能的和是 15。所以可能的和的个数是 226。因为一个 10 元素集合存在 252 个 5 元子集，根据鸽巢原理至少 2 个有同样的和。
15. a)50　b)50　c)14　d)5
17. 设 a_1，a_2，…，a_m 是整数，且令 $d_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$。如果对于某个 i，$d_i \equiv 0 \pmod n$，命题得证。否则 $d_1 \bmod m, d_2 \bmod m, \cdots, d_m \bmod m$ 是 m 个在 $\{1,2,\cdots,m-1\}$ 中的整数。由鸽巢原理对于某个 $1 \leqslant k < l \leqslant m$ 有 $d_k = d_l$，于是 $\sum_{j=k+1}^{l} a_j = d_l - d_k \equiv 0 \pmod m$。
19. 有理数 a/b 的十进制展开式可以通过 b 除 a 得到，其中 a 写成含有小数点的十进制小数，且后面跟随着无数个 0。基本步骤是找出商的下一个十进制数字，即 $\lfloor r/b \rfloor$，其中 r 是余数和从被除数移下来的下一位。当前的余数由前面的余数减去商的前面数字的 b 倍得到。最后被除数没有数字时移下 0。此外，由于只存在 b 个可能的余数。于是由鸽巢原理，在某一步将得到与前面某一步相同的结果。从这一步向后计算一定遵循着相同的模式。特别是商将被重复。
21. a)125 970　b)20　c)141 120 525　d)141 120 505　e)177 100　f)141 078 021
23. a)10　b)8　c)7
25. 3^n
27. $C(n+2, r+1) = C(n+1, r+1) + C(n+1, r) = 2C(n+1, r+1) - C(n+1, r+1) + C(n+1, r) = 2C(n+1, r+1) - (C(n, r+1) + C(n, r)) + (C(n, r) + C(n, r-1)) = 2C(n+1, r+1) - C(n, r+1) + C(n, r-1)$
29. 把 $x=1$ 和 $y=3$ 代入二项式定理。
31. $C(n+1, 5)$
33. 3 491 888 400
35. 5^{24}
37. a)45　b)57　c)12
39. a)386　b)56　c)512
41. 如果 $n<m$ 为 0；如果 $n \geqslant m$ 为 $C(n-1, n-m)$。
43. a)15 625　b)202　c)210　d)10
45. **procedure** *next permutation*（n：正整数，a_1，a_2，…，a_r：不超过 n 的正整数具有 $a_1a_2\cdots a_r \neq nn\cdots n$）

```
i := r
while a_i = n
begin
  a_i := 1
  i := i − 1
end
a_i := a_i + 1
{a_1 a_2 … a_r 是按照字典次序的下一个排列}
```

47. 我们必须证明，如果在一个晚会上存在 $R(m, n-1)+R(m-1, n)$ 个人，那么一定至少有 m 个人彼此是朋友，或者 n 个人彼此是敌人。考虑一个人，让我们称他为杰瑞。那么在晚会上有 $R(m-1, n)+R(m, n-1)-1$ 个其他的人，并且根据鸽巢原理，在这些人中一定是或者至少有 $R(m-1, n)$ 个杰瑞的朋友，或者 $R(m, n-1)$ 个杰瑞的敌人。首先假定存在 $R(m-1, n)$ 个杰瑞的朋友，根据 R 的定义，在这些人中，我们保证发现 $m-1$ 个人彼此都是朋友，或者 n 个人彼此都是敌人。在前一种情况下，这 $m-1$ 个彼此的朋友与杰瑞一起就是 m 个彼此是朋友的人的集合；在后一种情况下，我们有了所要求的 n 个彼此是敌人的人的集合。其他的情况类似：假设存在 $R(m, n-1)$ 个杰瑞的敌人，我们保证在他们中间发现或者 m 个人彼此是朋友，或者 $n-1$ 个人彼此是敌人。在前一种情况下，我们有所要求的 m 个人彼此都是朋友；在后一种情况下，这 $n-1$ 个彼此的敌人与杰瑞一起是 n 个彼此是敌人的人的集合。

第 4 章

4.1 节

1. a)2，12，72，432，2592　b)2，4，16，256，65，536

c)1，2，5，11，26　　d)1，1，6，27，204　　e)1，2，0，1，3

2. a)6，17，49，143，421

b)$49=5\cdot17-6\cdot6$，$143=5\cdot49-6\cdot17$，$421=5\cdot143-6\cdot49$

c)$5a_{n-1}-6a_{n-2}=5(2^{n-1}+5\cdot3^{n-1})-6(2^{n-2}+5\cdot3^{n-2})=2^{n-2}(10-6)+3^{n-2}(75-30)$

$=2^{n-2}\cdot4+3^{n-2}\cdot9\cdot5=2^n+3^n\cdot5=a_n$

3. a)是　b)不是　c)不是　d)是　e)是　f)是　g)不是　h)不是

4. a)$a_{n-1}+2a_{n-2}+2n-9=-(n-1)+2+2(-(n-2)+2)+2n-9=-n+2=a_n$

b)$a_{n-1}+2a_{n-2}+2n-9=5(-1)^{n-1}-(n-1)+2+2(5(-1)^{n-2}-(n-2)+2)+2n-9$

$=5(-1)^{n-2}(-1+2)-n+2=a_n$

c)$a_{n-1}+2a_{n-2}+2n-9=3(-1)^{n-1}+2^{n-1}-(n-1)+2+2(3(-1)^{n-2}+2^{n-2}-(n-2)+2)+2n-9$

$=3(-1)^{n-2}(-1+2)+2^{n-2}(2+2)-n+2=a_n$

d)$a_{n-1}+2a_{n-2}+2n-9=7\cdot2^{n-1}-(n-1)+2+2(7\cdot2^{n-2}-(n-2)+2)+2n-9=2^{n-2}(7\cdot2+2\cdot7)-$
$n+2=a_n$

5. a)$a_n=2\cdot3^n$　b)$a_n=2n+3$　c)$a_n=1+n(n+1)/2$　d)$a_n=n^2+4n+4$

e)$a_n=1$　f)$a_n=(3^{n+1}-1)/2$　g)$a_n=5n!$　h)$a_n=2^n n!$

6. a)$a_n=3a_{n-1}$　b)5 904 900

7. a)$a_n=n+a_{n-1}$，$a_0=0$

b)$a_{12}=78$　c)$a_n=n(n+1)/2$

8. $B(k)=(1+(0.07/12))B(k-1)-100$，$B(0)=5000$

9. 设 $P(n)$是“$H_n=2^n-1$”。

基础步骤：$P(1)$为真，因为 $H_1=1$。

归纳步骤：假设 $H_n=2^n-1$，那么因为 $H_{n+1}=2H_n+1$，从而得到 $H_{n+1}=2(2^n-1)+1=2^{n+1}-1$。

10. a)$a_n=2a_{n-1}+a_{n-5}$，对于 $n\geqslant5$。　b)$a_0=1$，$a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=8$，$a_4=16$　c)1217

11. a)$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+2^{n-2}$ 对于 $n\geqslant2$　b)$a_0=0$，$a_1=0$　c)94

12. a)$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}$ 对于 $n\geqslant3$　b)$a_0=1$，$a_1=2$，$a_2=4$　c)81

13. a)$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ 对于 $n\geqslant2$　b)$a_0=1$，$a_1=1$　c)34

14. a)$a_n=2a_{n-1}+2a_{n-2}$ 对于 $n\geqslant2$　b)$a_0=1$，$a_1=3$　c)448

15. a)$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$ 对于 $n\geqslant2$　b)$a_0=1$，$a_1=3$　c)239

16. a)$a_n=2a_{n-1}$ 对于 $n\geqslant2$　b)$a_1=3$　c)96

17. a)$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ 对于 $n\geqslant2$　b)$a_0=1$，$a_1=1$　c)89

18. a)$R_n=n+R_{n-1}$，$R_0=1$　b)$R_n=n(n+1)/2+1$

19. a)$S_n=S_{n-1}+(n^2-n+2)/2$，$S_0=1$　b)$S_n=(n^3+5n+6)/6$

20. 64

21. a)$a_n=2a_{n-1}+2a_{n-2}$　b)$a_0=1$，$a_1=3$　c)1224

22. 很显然对于 $m\geqslant1$ 有 $S(m,1)=1$。如果 $m\geqslant n$，那么一个从 m 元素集合到 n 元素集合的非映上函数可以由选择值域的大小和值域中的元素来确定。值域的大小是在 1 到 $n-1$ 之间的整数 k，包含 1 和 $n-1$，而这个值域可以用 $C(n,k)$种方式选取，并且选择一个到这个值域的映上函数可以有 $S(m,k)$种方式。因此存在 $\sum_{k=1}^{n-1}C(n,k)S(m,k)$ 个非映上函数。但是总共存在 n^m 个函数，所以 $S(m,n)=n^m-\sum_{k=1}^{n-1}C(n,k)S(m,k)$。

23. a)$C_5=C_0C_4+C_1C_3+C_2C_2+C_3C_1+C_4C_0=1\cdot14+1\cdot5+2\cdot2+5\cdot1+14\cdot1=42$

b)$C(10,5)/6=42$

24. $J(1)=1$，$J(2)=1$，$J(3)=3$，$J(4)=1$，$J(5)=3$，$J(6)=5$，$J(7)=7$，$J(8)=1$，$J(9)=3$，$J(10)=5$，$J(11)=7$，$J(12)=9$，$J(13)=11$，$J(14)=13$，$J(15)=15$，$J(16)=1$

25. 首先，假设人数是偶数，比如说是 $2n$。在转了一圈并且回到第一个人以后，由于在偶数位置的人已经被排除，恰好有 n 个人留下来并且现在在位置 i 的人就是初始在位置 $2i-1$ 的人。因此，生还者[初始在位置 $J(2n)$]现在的位置是 $J(n)$；这就是在位置 $2J(n)-1$ 的人。所以，$J(2n)=2J(n)-1$。类似地，当有奇数个人时，比如说 $2n+1$ 个人，那么在转了一圈以后排除第 1 个人，有 n 个人留下来并且现在在位置 i 的人就是以前在位置 $2i+1$ 的人。因此，生还者将是现在占据位置 $J(n)$的人，即初始在位置 $2J(n)+1$ 的

人。所以，$J(2n+1)=2J(n)+1$。基础情形是 $J(1)=1$。

26. 73，977，3617

27. 下面的 9 次移动求解了这个难题：从柱 1 到柱 2 移动盘 1；从柱 1 到柱 3 移动盘 2；从柱 2 到柱 3 移动盘 1；从柱 1 到柱 2 移动盘 3；从柱 1 到柱 4 移动盘 4；从柱 2 到柱 4 移动盘 3；从柱 3 到柱 2 移动盘 1；从柱 3 到柱 4 移动盘 2；从柱 2 到柱 4 移动盘 1。要明白至少需要 9 次移动，首先注意，不管有多少根柱子至少 7 次移动是需要的：3 次用来拿走盘子，1 次用来移动最大的盘 4，并且还要 3 次移动来放好盘子。至少还需要 2 次另外的移动，因为要从柱 1 到柱 4 移动盘 4，其他 3 个盘子一定在柱 2 和柱 3，所以至少需要 1 次移动来放好它们和 1 次移动来拿走它们。

28. 基础情形是显然的。如果 $n>1$，算法由 3 步构成。第 1 步，由归纳假设，使用 $R(n-k)$次移动把最小的 $n-k$ 个盘子移到柱 2。然后使用通常的 3 个柱子的汉诺塔算法，用 2^k-1 次移动把剩下的盘子(最大的 k 个盘子)移到柱 4，移动时不使用柱 2。然后再由归纳法，用 $R(n-k)$次移动把最小的 $n-k$ 个盘子移到柱 4；对于这种移动，所有的柱子都可以用，因为最大的盘子在柱 4，对移动没有妨碍。这就建立了递推关系。

29. 首先注意到 $R(n)=\sum_{j=1}^{n}(R(j)-R(j-1))$(因为化简这个和并且 $R(0)=0$)。由练习 58,这就是关于 j 的值域对 $2^{k'-1}$ 求和,因此这个和是 $\sum_{i=1}^{k} i2^{i-1}$,如果 n 不是一个三角形数,那么当 $i=k$ 时最后某些值丢失，并且这就是在给定表达式中最后的项所表示的。

30. 由练习 29，$R(n)$不大于 $\sum_{i=1}^{k} i2^{i-1}$ 。可以证明这个和等于$(k+1)2^k-2^{k+1}+1$，因此它不比$(k+1)2^k$ 大。因为 $n>k(k-1)/2$，可以用二次公式证明对于所有的 $n>1$ 有 $k<1+\sqrt{2n}$。因而对于所有的 $n>2$，$R(n)$以$(1+\sqrt{2n}+1)2^{1+\sqrt{2n}}<8\sqrt{n}\,2^{\sqrt{2n}}$ 为上界。所以 $R(n)$是 $O(\sqrt{n}\,2^{\sqrt{2n}})$。

31. $a_n-2\nabla a_n+\nabla^2 a_n$
$=a_n-2(a_n-a_{n-1})+(\nabla a_n-\nabla a_{n-1})$
$=-a_n+2a_{n-1}+((a_n-a_{n-1})-(a_{n-1}-a_{n-2}))$
$=-a_n+2a_{n-1}+(a_n-2a_{n-1}+a_{n-2})$
$=a_{n-2}$

32. $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$
$=(a_n-\nabla a_n)+(a_n-2\nabla a_n+\nabla^2 a_n)$
$=2a_n-3\nabla a_n+\nabla^2 a_n$
或 $a_n=3\nabla a_n-\nabla^2 a_n$

4.2 节

1. a)3 阶 b)不是 c)4 阶 d)不是 e)不是 f)2 阶 g)不是

2. a)$a_n=3\cdot 2^n$ b)$a_n=2$ c)$a_n=3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$
d)$a_n=6\cdot 2^n-2\cdot n2^n$ e)$a_n=n(-2)^{n-1}$ f)$a_n=2^n-(-2)^n$
g)$a_n=(1/2)^{n+1}-(-1/2)^{n+1}$

3. $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$

4. $(2^{n+1}+(-1)^n)/3$

5. a)$P_n=1.2P_{n-1}+0.45P_{n-2}$，$P_0=100\,000$，$P_1=120\,000$
b)$P_n=(250\,000/3)(3/2)^n+(50\,000/3)(-3/10)^n$

6. a)基础步骤：对于 $n=1$ 有 $1=0+1$，且对于 $n=2$ 有 $3=1+2$。
归纳步骤：假设对于 $k\leqslant n$ 为真，那么 $L_{n+1}=L_n+L_{n-1}=f_{n-1}+f_{n+1}+f_{n-2}+f_n=(f_{n-1}+f_{n-2})+(f_{n+1}+f_n)=f_n+f_{n+2}$
b)$L_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

7. $a_n=8(-1)^n-3(-2)^n+4\cdot 3^n$

8. $a_n=5+3(-2)^n-3^n$

9. 设 $a_n=C(n,0)+C(n-1,1)+\cdots+C(n-k,k)$其中 $k=\lfloor n/2\rfloor$。首先，假设 n 是偶数，使得 $k=n/2$，且最后项是 $C(k,k)$。由帕斯卡恒等式有 $a_n=1+C(n-2,0)+C(n-2,1)+C(n-3,1)+C(n-3,2)+\cdots+C(n-k,k-2)+C(n-k,k-1)+1=1+C(n-2,1)+C(n-3,2)+\cdots+C(n-k,k-1)+C(n-2,0)+C(n-3,1)+\cdots+C(n-k,k-2)+1=a_{n-1}+a_{n-2}$，因为$\lfloor(n-1)/2\rfloor=k-1=\lfloor(n-2)/2\rfloor$。当 n 是奇数时有类似的计算。因此，对于所有的正整数 n，$n\geqslant 2$，$\{a_n\}$满足递推关系 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$。此外，$a_1=C(1,0)=1$ 和 $a_2=C(2,0)+C(1,1)=2$，这就是 f_2 和 f_3。从而得到对于所有的正整数 n，$a_n=f_{n+1}$。

10. $a_n=(n^2+3n+5)(-1)^n$

11. $(a_{1,0}+a_{1,1}n+a_{1,2}n^2+a_{1,3}n^3)+(a_{2,0}+a_{2,1}n+a_{2,2}n^2)(-2)^n+(a_{3,0}+a_{3,1}n)3^n+a_{4,0}(-4)^n$

12. a)$3a_{n-1}+2^n=3(-2)^n+2^n=2^n(-3+1)=-2^{n+1}=a_n$
 b)$a_n=\alpha 3^n-2^{n+1}$ c)$a_n=3^{n+1}-2^{n+1}$

13. a)$A=-1$，$B=-7$ b)$a_n=\alpha 2^n-n-7$ c)$a_n=11\cdot 2^n-n-7$

14. a)$p_3n^3+p_2n^2+p_1n+p_0$ b)$n^2p_0(-2)^n$ c)$n^2(p_1n+p_0)2^n$ d)$(p_2n^2+p_1n+p_0)4^n$
 e)$n^2(p_2n^2+p_1n+p_0)(-2)^n$ f)$n^2(p_4n^4+p_3n^3+p_2n^2+p_1n+p_0)2^n$ g)p_0

15. a)$a_n=\alpha 2^n+3^{n+1}$ b)$a_n=-2\cdot 2^n+3^{n+1}$

16. $a_n=\alpha 2^n+\beta 3^n-n\cdot 2^{n+1}+3n/2+21/4$

17. $a_n=(\alpha+\beta n+n^2+n^3/6)2^n$

18. $a_n=-4\cdot 2^n-n^2/4-5n/2+1/8+(39/8)3^n$

19. $a_n=n(n+1)(n+2)/6$

20. a)1，-1，$i-i$ b)$a_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(-1)^n+\frac{2+i}{4}i^n+\frac{2-i}{4}(-i)^n$

21. a)使用关于 f_n 的公式可看出

$$\left|f_n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right|<1/\sqrt{5}<1/2$$

 这意味着 f_n 是最接近$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 的整数。

 b)当 n 是偶数时较小；当 n 是奇数时较大。

22. a)$a_n=3a_{n-1}+4a_{n-2}$，$a_0=2$，$a_1=6$
 b)$a_n=(4^{n+1}+(-1)^n)/5$

23. a)$a_n=2a_{n-1}+(n-1)10\,000$
 b)$a_n=70\,000\ 2^{n-1}-10\,000\ n-10\,000$

25. $6^n\cdot 4^{n-1}/n$

4.3 节

1. 14

2. 第一步是$(1110)_2(1010)_2=(2^4+2^2)(11)_2(10)_2+2^2((11)_2-(10)_2)((10)_2-(10)_2)+(2^2+1)(10)_2\cdot(10)_2$。这个积是$(10\,001\,100)_2$。

3. $C=50\,665C+729=33\,979$

4. a)2 b)4 c)7

5. a)79 b)48 829 c)30 517 579

6. a)基础步骤：如果序列只有一个元素，那么在这个表中的一个人就是赢的人。
 递归步骤：把这个表分成两部分(前一半和后一半尽可能相等)。递归地应用算法到每一半直到至多出现两个名字为止。然后检查整个表来计算每个名字出现的数目，如果谁超过半数就决定谁赢。
 b)$O(n\log n)$

7. a)7 b)$O(\log n)$

8. a)**procedure** *largest sum*$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$
 best：$=0$\{空序列和为 0\}
 for i：$=1$ **to** n

```
begin
  sum := 0
  for j := i+1 to n
  begin
    sum := sum + aj
    if sum > best then best := sum
  end
end
{best 是在这个表中可能的最大和}
```

b) $O(n^2)$

c) 我们把这个表划分成前一半和后一半，并且递归地对每一半应用算法找连续项的最大和。在整个序列的连续项的最大和是这两个数中的一个，或者是横跨这个表中间的连续项的序列之和。为了找到横跨这个表中间的连续项序列的最大可能的和，我们从表的中间开始向后移动来找在这个表的后一半的最大可能的和，并且向前移动来找在这个表的前一半的最大可能的和；所要的和就是这两个量之和。那么最后的答案就是这个和以及递归得到的两个答案之中的最大者。基础情况是一个项的序列的最大和就是这个数和 0 之中的较大者。

d) 11，9，14

e) $S(n)=2S(n/2)+n$，$C(n)=2C(n/2)+n+2$，$S(1)=0$，$C(1)=1$

f) $O(n\log n)$，比 $O(n^2)$ 好

9. (1，6)和(3，2)距离为 2。

10. 算法基本上与例 12 给出的算法一样。中心空隙宽度仍旧是 $2d$，但我们仅需要考虑 2 个大小 $d\times d$ 的盒子而不是大小 $(d/2)\times(d/2)$ 的 8 个盒子。除了系数 7 被 1 替换以外，递推关系与例 12 的递推关系一样。

11. 由于 $k=\log_b n$，从而有 $f(n)=a^k f(1)+\sum_{j=0}^{k-1} a^j c(n/b^j)^d=a^k f(1)+\sum_{j=0}^{k-1} cn^d=a^k f(1)+kcn^d=a^{\log_b n} f(1)+c(\log_b n)n^d=n^{\log_b a} f(1)+cn^d\log_b n=n^d f(1)+cn^d\log_b n$。

12. 设 $k=\log_b n$，其中 n 是 b 的幂。
基础步骤：如果 $n=1$ 且 $k=0$，那么 $c_1 n^d+c_2 n^{\log_b a}=c_1+c_2=b^d c/(b^d-a)+f(1)+b^d c/(a-b^d)=f(1)$。
归纳步骤：假设对于 k 为真，其中 $n=b^k$。那么对于 $n=b^{k+1}$，$f(n)=af(n/b)+cn^d=a\{[b^d c/(b^d-a)](n/b)^d+[f(1)+b^d c/(a-b^d)]\cdot(n/b)^{\log_b a})\}+cn^d=b^d c/(b^d-a)n^d a/b^d+[f(1)+b^d c/(a-b^d)]n^{\log_b a}+cn^d=n^d[ac/(b^d-a)+c(b^d-a)/(b^d-a)]+[f(1)+b^d c/(a-b^d c)]n^{\log_b a}=[(b^d c)/(b^d-a)]n^d+[f(1)+b^d c/(a-b^d)]n^{\log_b a}$。

13. 如果 $a>b^d$ 那么 $\log_b a>d$，所以第二项为主，给出 $O(n^{\log_b a})$。

4.4 节

1. $f(x)=2(x^6-1)/(x-1)$
2. a) $f(x)=2x(1-x^6)/(1-x)$　b) $x^3/(1-x)$　c) $x/(1-x^3)$
   d) $2/(1-2x)$　e) $(1+x)^7$　f) $2/(1+x)$
   g) $(1/(1-x))-x^2$　h) $x^3/(1-x)^2$
3. a) $5/(1-x)$　b) $1/(1-3x)$　c) $2x^3/(1-x)$
   d) $(3-x)/(1-x)^2$　e) $(1+x)^8$　f) $1/(1-x)^5$
4. a) $a_0=-64$，$a_1=144$，$a_2=-108$，$a_3=27$，对于所有的 $n\geqslant 4$ 有 $a_n=0$
   b) 非零系数只有 $a_0=1$，$a_3=3$，$a_6=3$，$a_9=1$
   c) $a_n=5^n$
   d) 对于 $n\geqslant 3$ 有 $a_n=(-3)^{n-3}$，$a_0=a_1=a_2=0$
   e) $a_0=8$，$a_1=3$，$a_2=2$，对于比 2 大的 n，n 为奇数有 $a_n=0$，n 为偶数有 $a_n=1$
   f) 如果 n 是 4 的正整数倍，$a_n=1$；如果 $n<4$ 有 $a_n=-1$；否则 $a_n=0$
   g) 对于 $n\geqslant 2$ 有 $a_n=n-1$，$a_0=a_1=0$
   h) $a_n=2^{n+1}/n!$
5. a) 6　b) 3　c) 9　d) 0　e) 5

6. a)1024　　b)11　　c)66　　d)292 864　　e)20 412
7. 10
8. 50
9. 20
10. $f(x)=1/((1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10}))$
11. 15
12. a)$x^4(1+x+x^2+x^3)^2/(1-x)$　　b)6
13. a)在 $1/((1-x^3)(1-x^4)(1-x^{20}))$ 的幂级数展开式中 x^r 的系数
    b)$1/(1-x^3-x^4-x^{20})$　　c)7　　d)3224
14. a)3　　b)29　　c)29　　d)242
15. a)10　　b)49　　c)2　　d)4
16. a)$G(x)-a_0-a_1x-a_2x^2$　　b)$G(x^2)$　　c)$x^4G(x)$
    d)$G(2x)$　　e)$\int_0^x G(t)\mathrm{d}t$　　f)$G(x)/(1-x)$
17. $a_k=2\cdot 3^k-1$
18. $a_k=18\cdot 3^k-12\cdot 2^k$
19. $a_k=k^2+8k+20+(6k-18)2^k$
20. 设 $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}f_kx^k$。在对和式的序标移位并将序列求和以后，易得 $G(x)-xG(x)-x^2G(x)=f_0+(f_1-f_0)x+\sum_{k=2}^{\infty}(f_k-f_{k-1}-f_{k-2})x^k=0+x+\sum_{k=2}^{\infty}0x^k$，由此得 $G(x)-xG(x)-x^2G(x)=x$。求解 $G(x)$ 得 $G(x)=x/(1-x-x^2)$。由部分分式的方法证明 $x/(1-x-x^2)=(1/\sqrt{5})[1/(1-\alpha x)-1/(1-\beta x)]$，其中 $\alpha=(1+\sqrt{5})/2$ 且 $\beta=(1-\sqrt{5})/2$。由事实 $1/(1-\alpha x)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^kx^k$，得 $G(x)=(1/\sqrt{5})\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha^k-\beta^k)x^k$，因此 $f_k=(1/\sqrt{5})(\alpha^k-\beta^k)$。
21. a)设 $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n$ 是 $\{C_n\}$ 的生成函数。那么 $G(x)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}C_kC_{n-k}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k-1}^{n=0}C_kC_{n-1-k}\right)x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}C_nx^{n-1}$，因此 $xG(x)^2=\sum_{n=1}^{\infty}C_nx^n$，这就推出 $xG(x)^2-G(x)+1=0$。应用二次方程求根公式得 $G(x)=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$，在这个公式中我们选择减号，因为选择加号会导致除以零。
    b)由练习 40 知 $(1-4x)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$，逐项积分(根据微积分的定理是允许的)得 $\int_0^x(1-4t)^{-1/2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$，因为 $\int_0^x(1-4t)^{-1/2}dt=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}=xG(x)$，由系数相等得 $C_n=\dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。
22. 对等式 $(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n$ 应用二项式定理，证明 $\sum_{r=0}^{m+n}C(m+n,r)x^r=\sum_{r=0}^{m}C(m,r)x^r\cdot\sum_{r=0}C(n,r)x^r=\sum_{r=0}^{m+n}\left(\sum_{k=0}^{r}C(m,r-k)C(n,k)\right)x^r$。比较系数就得到所需要的恒等式。
23. a)$2e^x$　　b)e^{-x}　　c)e^{3x}　　d)xe^x+e^x　　e)$(e^x-1)/x$
24. a)$a_n=(-1)^n$　　b)$a_n=3\cdot 2^n$　　c)$a_n=3^n-3\cdot 2^n$　　d)$a_n=(-2)^n$，$n\geqslant 2$，$a_1=-3$，$a_0=2$
    e)$a_n=(-2)^n+n!$　　f)$a_n=(-3)^n+n!\cdot 2^n$，$n\geqslant 2$，$a_0=1$，$a_1=-2$
    g)若 n 是奇数，$a_n=0$；若 n 是偶数，$a_n=n!/(n/2)!$
25. a)$a_n=6a_{n-1}+8^{n-1}$，$n\geqslant 1$，$a_0=1$。
    b)相关的线性齐次递推关系的通解是 $a_n^{(h)}=\alpha 6^n$，特解是 $a_n^{(p)}=\frac{1}{2}\cdot 8^n$。因此通解是 $a_n=\alpha 6^n+\frac{1}{2}\cdot 8^n$。使

用初始条件得 $\alpha=\frac{1}{2}$，因此 $a_n=(6^n+8^n)/2$。

c)设 $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$。使用关于$\{a_k\}$的递推关系可证明 $G(x)-6xG(x)=(1-7x)/(1-8x)$，因此 $G(x)=(1-7x)/((1-6x)(1-8x))$。由部分分式得 $G(x)=(1/2)/(1-6x)+(1/2)/(1-8x)$。利用表 4-1得 $a_n=(6^n+8^n)/2$。

26. $\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdots$

27. $(1+x)(1+x)^2(1+x)^3\cdots$

28. 因为$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdots=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots$，练习 52 和 53 的生成函数相等。

29. a) $G_X(1)=\sum_{k=0}^{\infty}p(X=k)\cdot 1^k=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=1$

b)$G_X'(1)=\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}p(X=k)\cdot x^k\mid_{x=1}=\sum_{k=0}^{\infty}p(X=k)\cdot k\cdot x^{k-1}\mid_{x=1}$

$=\sum_{k=0}^{\infty}p(X=k)\cdot k=E(X)$

c)$G_X''(1)=\frac{d^2}{dx^2}\sum_{k=0}^{\infty}p(X=k)\cdot x^k\mid_{x=1}=\sum_{k=0}^{\infty}p(X=k)\cdot k(k-1)\cdot x^{k-2}\mid_{x=1}$

$=\sum_{k=0}^{\infty}p(X=k)\cdot(k^2-k)=V(X)+E(X)^2-E(X)$。与(b)组合就得到所需的结果。

4.5 节

1. a)30 b)29 c)24 d)18
2. 1%
3. a)300 b)150 c)175 d)100
4. 492
5. 974
6. 55
7. 248
8. 50 138
9. 234
10. $|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5|=|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|+|A_5|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_1\cap A_4|-|A_1\cap A_5|-|A_2\cap A_3|-|A_2\cap A_4|-|A_2\cap A_5|-|A_3\cap A_4|-|A_3\cap A_5|-|A_4\cap A_5|+|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|+|A_1\cap A_2\cap A_5|+|A_1\cap A_3\cap A_4|+|A_1\cap A_3\cap A_5|+|A_1\cap A_4\cap A_5|+|A_2\cap A_3\cap A_4|+|A_2\cap A_3\cap A_5|+|A_2\cap A_4\cap A_5|+|A_3\cap A_4\cap A_5|-|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|-|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_5|-|A_1\cap A_2\cap A_4\cap A_5|-|A_1\cap A_3\cap A_4\cap A_5|-|A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5|+|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5|$
11. $|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6|=|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|+|A_5|+|A_6|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_1\cap A_4|-|A_1\cap A_5|-|A_1\cap A_6|-|A_2\cap A_3|-|A_2\cap A_4|-|A_2\cap A_5|-|A_2\cap A_6|-|A_3\cap A_4|-|A_3\cap A_5|-|A_3\cap A_6|-|A_4\cap A_5|-|A_4\cap A_6|-|A_5\cap A_6|$
12. $p(E_1\cup E_2\cup E_3)=p(E_1)+p(E_2)+p(E_3)-p(E_1\cap E_2)-p(E_1\cap E_3)-p(E_2\cap E_3)+p(E_1\cap E_2\cap E_3)$
13. 4972/71，295
14. $p(E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4\cup E_5)=p(E_1)+p(E_2)+p(E_3)+p(E_4)+p(E_5)-p(E_1\cap E_2)-p(E_1\cap E_3)-p(E_1\cap E_4)-p(E_1\cap E_5)-p(E_2\cap E_3)-p(E_2\cap E_4)-p(E_2\cap E_5)-p(E_3\cap E_4)-p(E_3\cap E_5)-p(E_4\cap E_5)+p(E_1\cap E_2\cap E_3)+p(E_1\cap E_2\cap E_4)+p(E_1\cap E_2\cap E_5)+p(E_1\cap E_3\cap E_4)+p(E_1\cap E_3\cap E_5)+p(E_1\cap E_4\cap E_5)+p(E_2\cap E_3\cap E_4)+p(E_2\cap E_3\cap E_5)+p(E_2\cap E_4\cap E_5)+p(E_3\cap E_4\cap E_5)$
15. $p(\bigcup_{i=1}^{n}E_i)=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}p(E_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}p(E_i\cap E_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}p(E_i\cap E_j\cap E_k)-\cdots+(-1)^{n+1}p(\bigcap_{i=1}^{n}E_i)$

4.6 节

1. 75
2. 6
3. 46
4. 9875
5. 540
6. 2100
7. 1854
8. a) $D_{100}/100!$ b) $100D_{99}/100!$ c) $C(100, 2)/100!$ d) 0 e) $1/100!$
9. 2 170 680
10. 当 n 是奇数
11. $\phi(n)=n-\sum_{i=1}^{m}\frac{n}{p_i}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}\frac{n}{p_ip_j}-\cdots\pm\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}=n\prod_{i=1}^{m}\left(a-\frac{1}{p_i}\right)$
12. 4
13. 从 m 元素集合到 n 元素集合存在 n^m 个函数，从 m 元素集合到 n 元素集合有 $C(n, 1)(n-1)^m$ 个函数恰好缺少 1 个元素，$C(n, 2)(n-2)^m$ 个函数恰好缺少 2 个元素，继续下去，有 $C(n, n-1)1^m$ 个函数恰好缺少 $n-1$ 个元素。因此由容斥原理存在 $n^m-C(n, 1)(n-1)^m+C(n, 2)(n-2)^m-\cdots+(-1)^{n-1}C(n, n-1)1^m$ 个映上的函数。

补充练习

1. a) $A_n=4A_{n-1}$ b) $A_1=40$ c) $A_n=10\cdot 4^n$
3. a) $M_n=M_{n-1}+160\ 000$ b) $M_1=186\ 000$ c) $M_n=160\ 000n+26\ 000$
   d) $T_n=T_{n-1}+160\ 000n+26\ 000$ e) $T_n=80\ 000n^2+106\ 000n$
5. a) $a_n=a_{n-2}+a_{n-3}$ b) $a_1=0$，$a_2=1$，$a_3=1$ c) $a_{12}=12$
7. a) 2 b) 5 c) 8 d) 16
9. $a_n=2^n$
11. $a_n=2+4n/3+n^2/2+n^3/6$
13. $a_n=a_{n-2}+a_{n-3}$
15. $O(n^4)$
17. $O(n)$
19. a) $18n+18$ b) 18 c) 0
21. $\Delta(a_nb_n)=a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_n=a_{n+1}(b_{n+1}-b_n)+b_n(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}\Delta b_n+b_n\Delta a_n$
23. a) 设 $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，那么 $G'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$，因此，$G'(x)-G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}((n+1)a_{n+1}-a_n)x^n=\sum_{n=0}x^n/n!=e^x$，这正是题目要求的。易见 $G(0)=a_0=1$。
    b) 我们有 $(e^{-x}G(x))'=e^{-x}G'(x)-e^{-x}G(x)=e^{-x}(G'(x)-G(x))=e^{-x}e^x=1$。因此，$e^{-x}G(x)=x+c$，其中 c 是常数。从而，$G(x)=xe^x+ce^x$。由于 $G(0)=1$，所以 $c=1$。
    c) 我们有 $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1}/n!)+\sum_{n=0}^{\infty}(x^n/n!)=\sum_{n=1}^{\infty}(x^n/(n-1)!)+\sum_{n=0}^{\infty}(x^n/n!)$ 由此，对于所有的 $n\geqslant 1$，$a_n=1/(n-1)!+1/n!$，且 $a_0=1$。
25. 7
27. 110
29. 0
31. a) 19 b) 65 c) 122 d) 167 e) 168
33. $D_{n-1}/(n-1)!$
35. 11/32

第 5 章

5.1 节

1. a){(0，0)，(1，1)，(2，2)，(3，3)}
   b){(1，3)，(2，2)，(3，1)，(4，0)}
   c){(1，0)，(2，0)，(2，1)，(3，0)，(3，1)，(3，2)，(4，0)，(4，1)，(4，2)，(4，3)}
   d){(1，0)，(1，1)，(1，2)，(1，3)，(2，0)，(2，2)，(3，0)，(3，3)，(4，0)}(假设 0 不除以 0)
   e){(0，1)，(1，0)，(1，1)，(1，2)，(1，3)，(2，1)，(2，3)，(3，1)，(3，2)，(4，1)，(4，3)}
   f){(1，2)，(2，1)，(2，2)}
2. a)传递的　b)自反的，对称的，传递的　c)对称的　d)反对称的
   e)自反的，对称的，反对称的，传递的　f)没有这些性质
3. a)自反的，传递的　b)对称的　c)对称的　d)对称的
4. a)对称的　b)对称的，传递的　c)对称的
   d)自反的，对称的，传递的　e)自反的，传递的　f)自反的，对称的，传递的
   g)反对称的　h)反对称的，传递的
5. c)，d)，f)
6. a)不是反自反的　b)不是反自反的　c)不是反自反的　d)不是反自反的
7. 是，例如在{1，2}上的关系{(1，1)}
8. $(a, b)\in R$ 当且仅当 a 比 b 高
9. $\forall a\forall b((a, b)\in R\rightarrow(b, a)\notin R)$
10. 2^{mn}
11. a)$\{(a, b)\mid b$ 整除 $a\}$　b)$\{(a, b)\mid a$ 不整除 $b\}$
12. f^{-1}的图
13. a)$\{(a, b)\mid$ 要求 a 读书 b 或者 a 已经读过书 $b\}$
    b)$\{(a, b)\mid$ 要求 a 读书 b 并且 a 已经读过书 $b\}$
    c)$\{(a, b)\mid$ 或者要求 a 读书 b 但是 a 还没有读过书 b，或者不要求 a 读书 b 但是 a 已经读过书 $b\}$
    d)$\{(a, b)\mid$ 要求 a 读书 b 但是 a 还没有读过书 $b\}$
    e)$\{(a, b)\mid$ 不要求 a 读书 b 但是 a 已经读过书 $b\}$
14. $S\circ R=\{(a, b)\mid a$ 是 b 的父母且 b 有一个兄弟姐妹$\}$
    $R\circ S=\{(a, b)\mid a$ 是 b 的叔伯或阿姨$\}$
15. a)R^2　b)R_6　c)R_3　d)R_3　e)$\varnothing$　f)R_1　g)R_4　h)R_4
16. a)R_1　b)R_2　c)R_3　d)R^2　e)R_3　f)R^2　g)R^2　h)R^2
17. b 在某个人指导下得到他或她的博士学位，而这个人在 a 指导下得到他或她的博士学位；存在一个 $n+1$ 个人的序列，从 a 开始到 b 结束，使得序列中每个人都是下一个人的导师。
18. a)$\{(a, b)\mid a-b\equiv 0, 3, 4, 6, 8$ 或 $9\pmod{12}\}$
    b)$\{(a, b)\mid a\equiv b\pmod{12}\}$
    c)$\{(a, b)\mid a-b\equiv 3, 6$ 或 $9\pmod{12}\}$
    d)$\{(a, b)\mid a-b\equiv 4$ 或 $8\pmod{12}\}$
    e)$\{(a, b)\mid a-b\equiv 3, 4, 6, 8$ 或 $9\pmod{12}\}$
19. 8
20. a)65 536　b)32 768
21. a)$2^{n(n+1)/2}$　b)$2^n3^{n(n-1)/2}$　c)$3^{n(n-1)/2}$
    d)$2^{n(n-1)}$　e)$2^{n(n-1)/2}$　f)$2^{n^2}-2\cdot 2^{n(n-1)}$
22. 可能没有这样的 b。
23. 若 R 是对称的且$(a, b)\in R$，那么$(b, a)\in R$，因此$(a, b)\in R^{-1}$，从而有 $R\subseteq R^{-1}$。类似地有 $R^{-1}\subseteq R$，于是 $R=R^{-1}$。相反，若 $R=R^{-1}$且$(a, b)\in R$，那么$(a, b)\in R^{-1}$，从而$(b, a)\in R$，于是 R 是对称的。
24. R 是自反的，当且仅当对所有的 $a\in A$ 有$(a, a)\in R$，当且仅当对所有的 $a\in A$ 有$(a, a)\in R^{-1}$[因为

$(a, a)\in R$ 当且仅当$(a, a)\in R^{-1}$]，从而当且仅当 R^{-1}是自反的。

25. 使用数学归纳法。对于 $n=1$ 结果是平凡的。假设 R^n 是自反和传递的。由定理 1，$R^{n+1}\subseteq R$。为得到 $R\subseteq R^{n+1}=R^n\circ R$，令$(a, b)\in R$。由归纳假设，$R^n=R$ 并且因此是自反的。于是$(b, b)\in R^n$，从而$(a, b)\in R^{n+1}$。
26. 使用数学归纳法。$n=1$ 时结果是平凡的。假设 R^n 是自反的，那么对所有的 $a\in A$ 有$(a, a)\in R^n$ 且$(a, a)\in R$。于是对所有的 $a\in A$ 有$(a, a)\in R^n\circ R=R^{n+1}$。
27. 不是，例如 $R=\{(1, 2), (2, 1)\}$。

5.2 节

1. {(1，2，3)，(1，2，4)，(1，3，4)，(2，3，4)}
2. (Nadir，122，34，底特律，08:10)，(Acme，221，22，丹佛，08:17)，(Acme，122，33，安克雷奇，08:22)，(Acme，323，34，檀香山，08:30)，(Nadir，199，13，底特律，08:47)，(Acme，222，22，丹佛，09:10)，(Nadir，322，34，底特律，09:44)
3. 航空公司与航班号，航空公司与起飞时间
4. a)是　　b)不是　　c)不是
5. a)社会保险号
   b)没有两个人恰好有着同一街道住址且有相同的名字
   c)没有两个有相同的名字的人住在一起
6. (Nadir，122，34，底特律，08:10)，(Nadir，199，13，底特律，08:47)，(Nadir，322，34，底特律，09:44)
7. (Nadir，122，34，底特律，08:10)，(Nadir，199，13，底特律，08:47)，(Nadir，322，34，底特律，09:44)，(Acme，221，22，丹佛，08:17)，(Acme，222，22，丹佛，09:10)
8. $P_{3,5,6}$
9.

航空公司	目的地	航空公司	目的地
Nadir	底特律	Acme	安克雷奇
Acme	丹佛	Acme	檀香山

10.

供货商	零件号	项目	数量	颜色代码
23	1092	1	2	2
23	1101	3	1	1
23	9048	4	12	2
31	4975	3	6	2
31	3477	2	25	2
32	6984	4	10	1
32	9191	2	80	4
33	1001	1	14	8

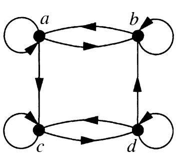
11. 这个等式的两边选择了由满足 C_1 和 C_2 两个条件的那些 n 元组构成的子集。
12. 这个等式的两边选择了在 R 中，在 S 中，并且满足条件 C 的那些 n 元组构成的子集。
13. 这个等式的两边选择了在 R 或 S 中，由 n 元组的第 i_1，第 i_2，…，第 i_m 分量构成的 m 元组。
14. 设 $R=\{(a, b)\}$且 $S=\{(a, c)\}$，$n=2$，$m=1$ 并且 $i_1=1$；$P_1(R-S)=\{(a)\}$，但是 $P_1(R)-P_1(S)=\varnothing$。
15. a)J_2 被 $P_{1,3}$跟随着
    b)(23，1)，(23，3)，(31，3)，(32，4)
16. 没有主键。

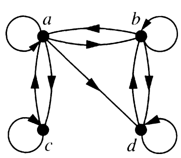
5.3 节

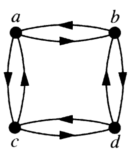
1. a) $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$　b) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$　c) $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$　d) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

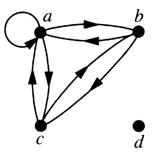
2. a)(1，1)，(1，3)，(2，2)，(3，1)，(3，3)　　　b)(1，2)，(2，2)，(3，2)
   c)(1，1)，(1，2)，(1，3)，(2，1)，(2，3)，(3，1)，(3，2)，(3，3)
3. R 是反自反的当且仅当关系矩阵主对角线上的元素全部是 0。
4. a)自反的、对称的、传递的
   b)反对称的、传递的
   c)对称的
5. a)4950　　b)9900　　c)99　　d)100　　e)1
6. 把每个 0 变成 1 并且把每个 1 变成 0。
7. a) $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$　b) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$　c) $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$
8. a) $\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$　b) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$　c) $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$
9. n^2-k
10. $\{(a,b),(a,c),(b,c),(c,b)\}$
11. $(a,c),(b,a),(c,d),(d,b)$
12. $\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(d,d)\}$
13. 关系是非对称的，当且仅当有向图没有环，也没有长度 2 的封闭路径。
14. 练习 10：反自反的。练习 11：反自反的、反对称的。
15. 把 R 的有向图的每条边的方向倒转。
16. 用数学归纳法证明。基础步骤：$n=1$ 是平凡的。归纳步骤：假设对 k 为真。因为 $R^{k+1}=R^k\circ R$,它的矩阵是 $\mathbf{M}_R\odot\mathbf{M}_{R^k}$，由归纳假设就是 $\mathbf{M}_R\odot\mathbf{M}_R^{[k]}=\mathbf{M}_R^{[k+1]}$。

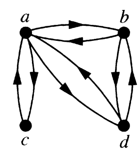
5.4 节

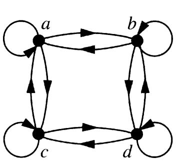
1. a)$\{(0,0),(0,1),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,0),(3,3)\}$
   b)$\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0)\}$
2. $\{(a,b)\mid a$ 整除 b 或 b 整除 $a\}$
3. 

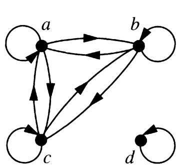
4. 

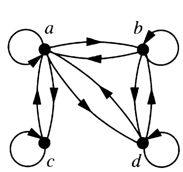
5. a) 

b) 

c) 

6. a) 

b) 

c) 

7. R 的对称闭包是 $R\cup R^{-1}$。$\mathbf{M}_{R\cup R^{-1}}=\mathbf{M}_R\vee\mathbf{M}_{R^{-1}}=\mathbf{M}_R\vee\mathbf{M}_R^t$。
8. 仅当 R 是反自反关系时，它就是它自己的闭包。
9. a)$\{(1,1),(1,5),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,5),(5,3),(5,4)\}$
   b)$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,5),(3,1),(3,3),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,1),(5,3),(5,5)\}$
   c)$\{(1,1)(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,$

4)，(3，5)，(4，1)，(4，3)，(4，4)，(4，5)，(5，1)，(5，2)，(5，3)，(5，4)，(5，5)}

d){(1，1)，(1，2)，(1，3)，(1，4)，(1，5)，(2，1)，(2，3)，(2，4)，(2，5)，(3，1)，(3，2)，(3，3)，(3，4)，(3，5)，(4，1)，(4，2)，(4，3)，(4，4)，(4，5)，(5，1)，(5，2)，(5，3)，(5，4)，(5，5)}

e){(1，1)，(1，2)，(1，3)，(1，4)，(1，5)，(2，1)，(2，2)，(2，3)，(2，4)，(2，5)，(3，1)，(3，2)，(3，3)，(3，4)，(3，5)，(4，1)，(4，2)，(4，3)，(4，4)，(4，5)，(5，1)，(5，2)，(5，3)，(5，4)，(5，5)}

f){(1，1)，(1，2)，(1，3)，(1，4)，(1，5)，(2，1)，(2，2)，(2，3)，(2，4)，(2，5)，(3，1)，(3，2)，(3，3)，(3，4)，(3，5)，(4，1)，(4，2)，(4，3)，(4，4)，(4，5)，(5，1)，(5，2)，(5，3)，(5，4}，(5，5)}

10. a)如果有学生 c，使得 a 和 c 在同一个班，c 和 b 也在同一个班。

b)如果有两个学生 c 和 d，使得 a 和 c 在同一个班，且 c 和 d 在同一个班，d 和 b 也在同一个班。

c)如果存在学生序列 s_0，s_1，…，s_n，$n\geqslant1$，使得 $s_0=a$，$s_n=b$，且对于每个 $i=1,2,\cdots,n$，s_i 与 s_{i-1} 在同一个班。

11. 从 $(R^*)^{-1}=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n\right)^{-1}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(R^n)^{-1}=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n=R^*$，命题得证。

12. a) $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$

13. 答案与练习 12 一样。

14. a){(1，1)，(1，2)，(1，4)，(2，2)，(3，3)，(4，1)，(4，2)，(4，4)}

b){(1，1)，(1，2)，(1，4)，(2，1)，(2，2)，(2，4)，(3，3)，(4，1)，(4，2)，(4，4)}

c){(1，1)，(1，2)，(1，4)，(2，1)，(2，2)，(2，4)，(3，3)，(4，1)，(4，2)，(4，4)}

15. 算法 1：$O(n^{3.8})$；算法 2：$O(n^3)$

16. 初始令 $\mathbf{A}:=\mathbf{M}_R\vee\mathbf{I}_n$ 且只对 $i:=2$ 到 $n-1$ 循环。

17. a)因为 R 是自反的，每个包含它的关系也一定是自反的。

b){(0，0)，(0，1)，(0，2)，(1，1)，(2，2)}和{(0，0)，(0，1)，(1，0)，(1，1)，(2，2)}都包含 R 且都有奇数个元素，但是其中的每一个都不是另一个的子集。

5.5 节

1. a)等价关系　b)不是自反的，也不是传递的　c)等价关系
d)不是传递的　e)不是对称的，也不是传递的

2. a)等价关系　b)不是传递的　c)不是自反的，不是对称的，也不是传递的
d)等价关系　e)不是自反的，也不是传递的

3. 有多种答案。

(1)若两座建筑物在同一年落成，则两者是等价的；等价类由某个给定年份落成的建筑物的集合构成(这一年至少有一座建筑物落成)。

(2)若两座建筑物具有相同楼层，则两者是等价的；等价类分别是一层建筑物的集合，两层建筑物的集合等(层数为 n 等价类中至少含有一个 n 层建筑物)。

(3)有一个类的每个建筑物等价于有一个类的每个建筑物(包括自身)，没有一个类的每个建筑物等价于没有一个类的每个建筑物(包括自身)。存在两个等价类：有类的建筑物集合和没有类的建筑物集合(假设它们非空)。

4. 语句“p 等价于 q”意味着 p 和 q 在真值表中有相同的值。R 自反的，因为 p 与 p 有相同的真值表。R 是对称的，因为如果 p 和 q 有相同的真值表，那么 q 和 p 有相同的真值表。如果 p 和 q 在它们的真值表中有相同的值，并且 q 和 r 在它们的真值表中有相同的值，那么 p 和 r 在它们的真值表中有相同的值，因此，R 是传递的。T 的等价类是所有永真式的集合；F 的等价类是所有矛盾式的集合。

5. a)因为 $f(x)=f(x)$，$(x,x)\in R$。所以 R 是自反的。$(x,y)\in R$ 当且仅当 $f(x)=f(y)$，当且仅当 $f(y)=$

$f(x)$，当且仅当$(y, x)\in R$。因此 R 是对称的。如果$(x, y)\in R$ 且$(y, z)\in R$，那么 $f(x)=f(y)$且 $f(y)=f(z)$，因此 $f(x)=f(z)$。于是$(x, z)\in R$，这就证明 R 是传递的。

b)对于 f 的值域中的 b 得到的集合 $f^{-1}(b)$。

6. 设 x 是长度至少为 3 的串，由于 x 与自己在前 3 位相同，$(x, x)\in R$，因此 R 是自反的。假设$(x, y)\in R$，那么 x 与 y 在前 3 位相同，因此 y 与 x 也在前 3 位相同，于是$(y, x)\in R$。如果(x, y)和(y, z)在 R 中，那么 x 和 y 在前 3 位相同，y 和 z 也在前 3 位相同。因此 x 和 z 在前 3 位相同。从而$(x, z)\in R$。于是 R 是传递的。
7. 由练习 9 得出，函数 f 是将一个长度至少为 3 的二进制串转换成由该串的第一位和第三位构成的序偶。
8. 因为 $a+b=b+a$，所以$((a, b), (a, b))\in R$，因此 R 是自反的。若$((a, b), (c, d))\in R$，则 $a+d=b+c$，于是 $c+b=d+a$，则$((c, d), (a, b))\in R$，因此 R 是对称的。若$((a, b), (c, d))\in R$ 及$((c, d), (e, f))\in R$，则 $a+d=b+c$ 且 $c+e=d+f$，于是 $a+d+c+e=b+c+d+f$，可得 $a+e=b+f$，即$((a, b), (e, f))\in R$，因此 R 是传递的。用代数表述解法更为简单，已知条件可表示为$f((a, b))=f((c, d))$，其中 $f((x, y))=x-y$，则由练习 9 可得出，R 是个等价关系。
9. a)由练习 5 得出。其中从($\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的)可微分函数集合到($\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的)函数集合的函数 f 是微分运算。

   b)对某个常数 C 形为 $g(x)=x^2+C$ 的所有函数的集合。
10. a)由练习 5 得出。其中 f 是从所有 URL 的集合到所有 Web 页集合的函数，f 对每个 URL 的赋值是关于这个 URL 的 Web 页。
11. 不是
12. 不是
13. R 是自反的，因为二进制串 s 和它自己有相同数量的 1。R 是对称的，因为 s 和 t 有相同数量的 1 推出 t 和 s 也有相同数量的 1。R 是传递的，因为如果 s 与 t 有相同数量的 1，t 与 u 有相同数量的 1，那么 s 与 u 也有相同数量的 1。
14. 所有恰好具有 2 个 1 的二进制串的集合
15. a)$[2]_5=\{i \mid i\equiv 2(\mathrm{mod}\ 5)\}=\{\cdots, -8, -3, 2, 7, 12, \cdots\}$

    b)$[3]_5=\{i \mid i\equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)\}=\{\cdots, -7, -2, 3, 8, 13, \cdots\}$

    c)$[6]_5=\{i \mid i\equiv 6(\mathrm{mod}\ 5)\}=\{\cdots, -9, -4, 1, 6, 111, \cdots\}$

    d)$[-3]_5=\{i \mid i\equiv -3(\mathrm{mod}\ 5)\}=\{\cdots, -8, -3, 2, 7, 12, \cdots\}$
16. $\{6n+k \mid n\in\mathbf{Z}\}$，$k\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
17. a)$[(1, 2)]=\{(a, b) \mid a-b= -1\}=\{(1, 2), (3, 4), (4, 5), (5, 6), \cdots\}$

    b)每个等价类可以理解为一个整数(正，负或 0)，特别地$[a, b]$可以理解为 $a-b$。
18. a)不是　　b)是　　c)是　　d)不是
19. (a)，(c)，(e)
20. (b)，(d)，(e)
21. a)$\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1\}, (2, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$

    b)$\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$

    c)$\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2\}, (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$

    d)$\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
22. $[0]_6\subseteq[0]_3$，$[1]_6\subseteq[1]_3$，$[2]_6\subseteq[2]_3$，$[3]_6\subseteq[0]_3$，$[4]_6\subseteq[1]_3$，$[5]_6\subseteq[2]_3$
23. 设 A 是在第一个划分中的集合。取 A 中一个特定元素 x。所有 16 位长且与 x 在后 8 位相同的二进制串的集合是在第二个划分中的一个集合。显然，A 中的每个串都在这个集合里。
24. 我们知道：等价类$[x]_{R_{31}}$是等价类$[x]_{R_8}$的子集。为证明这条结论，任取元素 $y\in[x]_{R_{31}}$，则 y 与 R_{31}中的 x 等价，所以或者 $y=x$，或者 y 和 x 都至少含有 31 个字符且它们的前 31 个字符相同。故而，至少含有 31 个字符且前 31 个字符相同的字符串，它们至少含有 8 个字符且前 8 个字符也相同。于是，或者 $y=x$，或者 y 和 x 都至少含有 8 个字符且它们的前 8 个字符相同。也就是说，则 y 与 R_8 中的 x 等价，因此 $y\in[x]_{R_8}$。
25. $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, d), (d, e),$

(e, d)，$(e, e)\}$

26. a)$\mathbf{Z}$　　b)$\{n+\frac{1}{2} \mid n\in\mathbf{Z}\}$

27. a)R 是自反的，因为任何涂色方案通过旋转 360 度可以从自身得到。由于每个旋转是两个翻转的合成，相反，两个翻转的合成也是一个旋转。由这个事实可以说明 R 是对称和传递的。(C_1, C_2)属于 R 当且仅当 C_2 可以通过翻转的合成由 C_1 得到。如果(C_1, C_2)属于 R，那么由于翻转合成的逆也是翻转的合成(按照相反的次序)，(C_2, C_1)也属于 R。于是 R 是对称的。假设(C_1, C_2)和(C_2, C_3)都属于 R，取每种情况下翻转的合成得到的仍是翻转的合成，故(C_1, C_3)属于 R，R 是传递的。

 b)我们用长度为 4 的序列表示涂色，r 和 b 分别代表红和蓝。我们按照左上方格、右上方格、左下方格、右下方格的次序列出表示颜色的字母。等价类是：$\{rrrr\}$，$\{bbbb\}$，$\{rrrb, rrbr, rbrr, brrr\}$，$\{bbbr, bbrb, brbb, rbbb\}$，$\{rbbr, brrb\}$，$\{rrbb, brbr, bbrr, rbrb\}$。

28. 5

29. 是

30. R

31. 首先构成 R 的自反闭包，然后构成这个自反闭包的对称闭包，最后构成自反闭包的对称闭包的传递闭包。

5.6 节

1. a)是偏序　　b)不是反对称的，不是传递的
 c)是偏序　　d)是偏序　　e)不是反对称的，不是传递的

2. a)不是　　b)不是　　c)是

3. a)是　　b)不是　　c)是　　d)不是

4. a)不是　　b)是　　c)不是

5. 不是

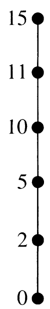
6. 是

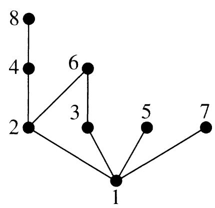
7. a)$\{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$
 b)$(\mathbf{Z}, \leqslant)$　　c)$(P(\mathbf{Z}), \subseteq)$　　d)$(\mathbf{Z}^+$，“是倍数”)

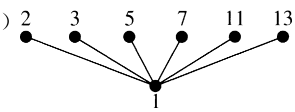
8. a)例如$\{0\}$和$\{1\}$　　b)例如 4 和 6

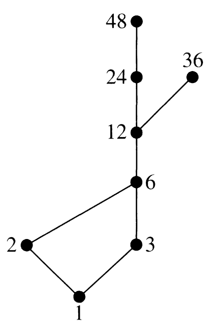
9. a)$(1, 1, 2)<(1, 2, 1)$　　b)$(0, 1, 2, 3)<(0, 1, 3, 2)$
 c)$(0, 1, 1, 1, 0)<(1, 0, 1, 0, 1)$

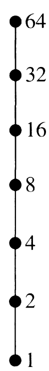
10. $0<0001<001<01<010<0101<011<11$

11. 

12. a) 

b) 

c) 

d) 

13. (a,b)，(a,c)，(a,d)，(b,c)，(b,d)，(a,a)，(b,b)，(c,c)，(d,d)

14. (a,a)，(a,g)，(a,d)，(a,e)，(a,f)，(b,b)，(b,g)，(b,d)，(b,e)，(b,f)，(c,c)，(c,g)，(c,d)，(c,e)，(c,f)，(g,d)，(g,e)，(g,f)，(g,g)，(d,d)，(e,e)，(f,f)

15. $(\varnothing,\{a\})$，$(\varnothing,\{b\})$，$(\varnothing,\{c\})$，$(\{a\},\{a,b\})$，$(\{a\},\{a,c\})$，$(\{b\},\{a,b\})$，$(\{b\},\{b,c\})$，$(\{c\},\{a,c\})$，$(\{c\},\{b,c\})$，$(\{a,b\},\{a,b,c\})$，$(\{a,c\},\{a,b,c\})$，$(\{b,c\},\{a,b,c\})$

16. 设$(S,\preccurlyeq)$是有穷偏序集。我们将证明这个偏序集是它的覆盖关系的自反传递闭包。假设(a,b)属于覆盖关系的自反传递闭包。那么$a=b$或$a\prec b$，因此$a\preccurlyeq b$；或者存在一个序列$a_1, a_2, \cdots, a_n$使得$a_1\prec a_2\prec\cdots\prec a_n\prec b$，在这种情况下由$\preccurlyeq$的传递性也有$a\preccurlyeq b$。反之，假设$a\prec b$，如果$a=b$，那么$(a,b)$属于覆盖关系的自反传递闭包。如果$a\prec b$并且不存在$z$使得$a\prec z\prec b$，那么$(a,b)$属于覆盖关系并且因此属于它的自反传递闭包。否则，设$a_1\prec a_2\prec\cdots\prec a_n\prec b$是这种形式的最长的序列(由于偏序集是有穷的所以存在这样的序列)，那么中间不会有其他元素插入，因此每个对(a,a_1)，(a_1,a_2)，…，(a_n,b)属于覆盖关系，从而(a,b)也属于它的自反传递闭包。

17. a)24，45　b)3，5　c)不存在　d)不存在
e)15，45　f)15　g)15，5，3　h)15

18. a)$\{1,2\}$，$\{1,3,4\}$，$\{2,3,4\}$　b)$\{1\}$，$\{2\}$，$\{4\}$
c)不存在　d)不存在　e)$\{2,4\}$，$\{2,3,4\}$　f)$\{2,4\}$
g)$\{3,4\}$，$\{4\}$　h)$\{3,4\}$

19. 因为$(a,b)\preccurlyeq(a,b)$，$\preccurlyeq$是自反的。如果$(a_1,a_2)\preccurlyeq(b_1,b_2)$并且$(a_1,a_2)\neq(b_1,b_2)$，那么或者$a_1\prec b_1$，或者$a_1=b_1$并且$a_2\prec b_2$。在两种情况下$(b_1,b_2)$都不小于等于$(a_1,a_2)$。因此$\preccurlyeq$是反对称的。假设$(a_1,a_2)\prec(b_1,b_2)\prec(c_1,c_2)$。那么如果$a_1\prec b_1$或$b_1\prec c_1$，我们有$a_1\prec c_1$，所以$(a_1,a_2)\prec(c_1,c_2)$。但是如果$a_1=b_1=c_1$，那么$a_2\prec b_2\prec c_2$，这也推出$(a_1,a_2)\prec(c_1,c_2)$，于是$\preccurlyeq$是传递的。

20. 因为$(s,t)\preccurlyeq(s,t)$，$\preccurlyeq$是自反的。如果$(s,t)\preccurlyeq(u,v)$并且$(u,v)\preccurlyeq(s,t)$，那么$s\preccurlyeq u\preccurlyeq s$且$t\preccurlyeq v\preccurlyeq t$；从而$s=u$且$t=v$。因此$\preccurlyeq$是反对称的。假设$(s,t)\preccurlyeq(u,v)\preccurlyeq(w,x)$，那么$s\preccurlyeq u$，$t\preccurlyeq v$，$u\preccurlyeq w$，$v\preccurlyeq x$，从而有$s\preccurlyeq w$和$t\preccurlyeq x$，因此$(s,t)\preccurlyeq(w,x)$。于是$\preccurlyeq$是传递的。

21. a)假设x是极大元素并且y是最大元素，那么$x\preccurlyeq y$。因为x不小于y，从而$x=y$。由练习32a)y是唯一的。因此x也是唯一的。
b)假设x是极小元素并且y是最小元素，那么$x\succcurlyeq y$。由于x不大于y，从而$x=y$。由练习32b)y是唯一的。因此x也是唯一的。

22. a)是　b)不是　c)是

23. 使用数学归纳法。设$P(n)$是“格的每个n元子集有最小上界和最大下界”。
基础步骤：$P(1)$为真，因为$\{x\}$的最小上界和最大下界都是x。
归纳步骤：假设$P(k)$为真。令S是$n+1$元素集合。设$x\in S$并且$S'=S-\{x\}$。因为S'有k个元素，由归纳假设有最小上界y和最大下界a。由于这是一个格，存在元素$z=\mathrm{lub}(x,y)$和$b=\mathrm{glb}(x,a)$。如果我们可以证明z是S的最小上界和b是S的最大下界，那么命题得证。为证明z是S的最小上界，首先注意到如果$w\in S$，那么$w=x$或$w\in S'$。如果$w=x$，因为z是x和y的最小上界，那么有$w\preccurlyeq z$。如果$w\in S'$，由于y是S'的最小上界，故$w\preccurlyeq y$，且由于$z=\mathrm{lub}(x,y)$，有$y\preccurlyeq z$，因而$w\preccurlyeq z$。为证明z是S的最小上界，假设u是S的一个上界，那么元素u一定是x和y的一个上界，但是由于$z=\mathrm{lub}(x,y)$，从而有$z\preccurlyeq u$。类似的论述可以证明b是S的最大下界。

24. a)不允许　b)允许
c)(私有的，{猎豹，美洲狮})，(受限制的，{猎豹，美洲狮})，(注册的，{猎豹，美洲狮})，(私有的，{猎豹，美洲狮，黑斑羚})，(受限制的，{猎豹，美洲狮，黑斑羚})，(注册的，{猎豹，美洲狮，黑斑羚})
d)(非私有的，{黑斑羚，美洲狮})，(私有的，{黑斑羚，美洲狮})，(受限制的，{黑斑羚，美洲狮})，(非私有的，{黑斑羚})，(私有的，{黑斑羚})，(受限制的，{黑斑羚})，(非私有的，{美洲狮})，(私有的，{美洲狮})，(受限制的，{美洲狮})，(非私有的，$\varnothing$)，(私有的，$\varnothing$)，(受限制的，$\varnothing$)

25. 设Π是集合S的所有划分的集合，如果划分P_1是P_2的加细，即如果P_1中的每个集合都是P_2中某个集合的子集，则$P_1\preccurlyeq P_2$。首先我们证明$(\Pi,\preccurlyeq)$是偏序集。由于对每个划分P有$P\preccurlyeq P$，$\preccurlyeq$是自反的。现

在假设 $P_1 \preccurlyeq P_2$ 并且 $P_2 \preccurlyeq P_1$，令 $T \in P_1$，因为 $P_1 \preccurlyeq P_2$，存在集合 $T' \in P_2$ 使得 $T \subseteq T'$；又因为 $P_2 \preccurlyeq P_1$，存在集合 $T'' \in P_1$ 使得 $T' \subseteq T''$，从而 $T \subseteq T''$。但是因为 P_1 是划分，由 $T = T''$ 和 $T \subseteq T' \subseteq T''$ 推出 $T = T'$，于是 $T \in P_2$。反之，通过交换 P_1 与 P_2 同样得出 P_2 的每个子集也在 P_1 中。因此 $P_1 = P_2$ 并且 $\preccurlyeq$ 是反对称的。下面假设 $P_1 \preccurlyeq P_2$ 并且 $P_2 \preccurlyeq P_3$。设 $T \in P_1$，那么存在集合 $T' \in P_2$ 使得 $T \subseteq T'$。由于 $P_2 \preccurlyeq P_3$，存在集合 $T'' \in P_3$ 使得 $T' \subseteq T''$，从而有 $T \subseteq T''$，因此 $P_1 \preccurlyeq P_3$。即 $\preccurlyeq$ 是传递的。划分 P_1 和 P_2 的最大下界是划分 P，P 的子集都是形如 $T_1 \cap T_2$ 的非空集合，其中 $T_1 \in P_1$ 且 $T_2 \in P_2$。关于这个结论的理由不再赘述。划分 P_1 与 P_2 的最小上界是对应于下述等价关系的划分。$x \in S$ 关系到 $y \in S$，如果对某个非负整数 n 存在序列 $x = x_0$，x_1，x_2，…，$x_n = y$，使得对从 1 到 n 的每个 i，x_{i-1} 和 x_i 在 P_1 或者在 P_2 的同一个元素中。我们不再详细证明这是一个等价关系，也不再证明它就是两个划分的最小上界。

26. 由练习 23，对整个有穷格存在最小上界和最大下界。根据定义，这些元素分别是最大元素和最小元素。
27. $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ 的子集的最小元素是具有最小的横坐标的对，并且如果存在多个这样的对，它就是这些对中具有最小的纵坐标的对。
28. 如果 x 是这个偏序集元素的一个递减序列中的整数，那么在这个序列中至多 $|x|$ 个元素可能跟随着 x，即绝对值为 $|x|-1$，$|x|-2$，…，1，0 的整数。因此不可能存在无穷递减序列。这不是一个全序集，例如 5 和 -5 是不可比的。
29. 为找出两个有理数中哪一个更大，把它们写成具有相同正分母的分数并且比较它们的分子。为证明这个集合是稠密的，假设 $x < y$ 是两个有理数。那么它们的平均值，即 $(x+y)/2$ 是一个在它们之间的有理数。
30. 设 $(S, \preccurlyeq)$ 是偏序集，只需证明 S 的每个非空子集包含一个最小元素，当且仅当在 S 中不存在元素的无限递减序列 a_1，a_2，a_3，…（即对所有的 i，$a_{i+1} \prec a_i$）。一个元素的无限递减序列显然没有最小元素。反之，设 A 是 S 的一个没有最小元素的非空子集。由于 A 非空，选择 $a_1 \in A$。因为 a_1 不是 A 的最小元素，选择 $a_2 \in A$ 且 $a_2 \prec a_1$。因为 a_2 不是 A 的最小元素，选择 $a_3 \in A$ 且 $a_3 \prec a_2$。按这种方法继续做下去，产生一个 S 中的无限递减序列。
31. $C \prec A \prec B \prec D \prec E \prec F \prec G$
32. 确定用户需求 $\prec$ 写出功能需求 $\prec$ 设置测试点 $\prec$ 开发系统需求 $\prec$ 写文档 $\prec$ 开发模块 $A \prec$ 开发模块 $B \prec$ 开发模块 $C \prec$ 模块集成 $\prec \alpha$ 测试 $\prec \beta$ 测试 $\prec$ 完成

补充练习

1. a)反自反的(这里不包含空串)，对称的　　b)反自反的，对称的
   c)反自反的，反对称的，传递的
3. 因为 $a+b=a+b$，$((a, b), (a, b)) \in R$，因此 R 是自反的。如果 $((a, b), (c, d)) \in R$ 那么 $a+d=b+c$，因此 $c+b=d+a$。从而 $((c, d), (a, b)) \in R$，于是 R 是对称的。假设 $((a, b), (c, d))$ 和 $((c, d), (e, f))$ 属于 R，那么 $a+d=b+c$ 且 $c+f=d+e$。把这两个等式相加，然后从两边减去 $c+d$ 得到 $a+f=b+e$。从而 $((a, b), (e, f))$ 属于 R，于是 R 是传递的。
5. 假设 $(a, b) \in R$。因为 $(b, b) \in R$，从而有 $(a, b) \in R^2$。
7. 是，是
9. 是，是
11. 在投影中具有相同关键字的两个记录在原来的关系中有相同的关键字。
13. $(\Delta \cup R)^{-1} = \Delta^{-1} \cup R^{-1} = \Delta \cup R^{-1}$
15. a)$R = \{(a, b), (a, c)\}$。R 的对称闭包的传递闭包是 $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$，它与 R 的传递闭包的对称闭包是不同的，后者是 $\{(a, b), (a, c), (b, a), (c, a)\}$。

    b)假设 (a, b) 属于 R 的传递闭包的对称闭包。必须证明 (a, b) 属于 R 的对称闭包的传递闭包。我们知道 (a, b) 和 (b, a) 中至少有一个属于 R 的传递闭包，因此在 R 中存在一条从 a 到 b 的或从 b 到 a 的路径(或者两条都有)。在前面的情况下，在 R 的对称闭包中存在一条从 a 到 b 的路径。在后面的情况下，我们可以通过把从 b 到 a 路径中的所有的边改变方向向回走，在 R 的对称闭包中构造一条从 a 到 b 的路径。因此 (a, b) 属于 R 的对称闭包的传递闭包。

17. 由于 $R \subseteq S$，S 的关于性质 P 的闭包是包含 R 的具有性质 P 的关系。因此 S 的关于性质 P 的闭包包含了 R 关于性质 P 的闭包。

19. 使用沃舍尔(Warshell)算法的基本思想，不同的只是令 $w_{ij}^{[k]}$ 等于使用下标不超过 k 的内部顶点从 u_i 到 u_j 的最长路径的长度。并且如果没有这种路径令 $w_{ij}^{[k]}$ 等于 -1。为了从 w_{k-1} 的元素找到 $w_{ij}^{[k]}$，对于每个 (i, j) 对确定是否存在不使用序标大于 k 的顶点从 v_i 到 v_k 的路径和从 v_k 到 v_j 的路径。如果 $w_{ik}^{[k-1]}$ 或 $w_{kj}^{[k-1]}$ 是 -1，那么这对路径不存在，因此置 $w_{ij}^{[k]} = w_{ij}^{[k-1]}$。如果这对路径存在，那么存在两种可能。如果 $w_{kk}^{[k-1]} > 0$，那么存在任意长的从 v_i 到 v_j 的路径，因此置 $w_{ij}^{[k]} = \infty$。如果 $w_{kk}^{[k-1]} = 0$，置 $w_{ij}^{-1} = \max(w_{ij}^{[k-1]}, w_{ik}^{[k-1]} + w_{kj}^{[k-1]})$（初始取 $\mathbf{W}_0 = \mathbf{M}_R$）。

21. 25

23. 因为 $A_i \cap B_j$ 是 A_i 和 B_j 的子集，这些子集的集合是每个给定划分的加细。我们必须证明这是一个划分。根据构造，每个这样的集合是非空的。下面说明这些集合的并就是 S。假设 $s \in S$，因为 P_1 和 P_2 是 S 的划分，存在集合 A_i 和 B_j 使得 $s \in A_i$ 且 $s \in B_j$，从而 $s \in A_i \cap B_j$。因此这些集合的并就是 S。为说明它们是两两不相交的，只要注意到除非 $i = i'$，$j = j'$，$(A_i \cap B_j) \cap (A_{i'} \cap B_{j'}) = (A_i \cap A_{i'}) \cap (A_j \cap A_{j'}) = \varnothing$。

25. 子集关系是任何集合族上的偏序，因为它是自反的，反对称的，传递的，这里的集合族是 $\mathbf{R}(S)$。

27. 找菜谱≺买海鲜≺买杂货≺洗海贝≺切姜蒜≺洗鱼≺蒸饭≺切鱼≺洗蔬菜≺切水栗子≺配菜≺烹调≺摆放餐具≺上菜

29. a)具有多个元素的唯一的反链是 $\{c, d\}$。

    b)具有多个元素的反链只有 $\{b, c\}$，$\{c, e\}$ 和 $\{d, e\}$。

    c)具有多个元素的反链只有 $\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{b, c\}$，$\{a, b, c\}$，$\{d, e\}$，$\{d, f\}$，$\{e, f\}$，$\{d, e, f\}$。

30. 设 $(S, \preccurlyeq)$ 是有穷偏序集，且 A 是一条极大链。因为 $(A, \preccurlyeq)$ 也是一个偏序集，它一定有极小元素 m。假设 m 不是 S 中的极小元素，那么存在 S 中的元素 a 使得 $a \prec m$。但是，这就使得集合 $A \cup \{a\}$ 变成比 A 更大的链，为此我们需要证明 a 与 A 中每一个元素都可比。因为 m 与 A 中每个元素都可比，并且 m 是极小元素，当 x 属于 A 且 $x \neq m$ 时有 $m \prec x$。由于 $a \prec m$ 且 $m \prec x$，由传递性对于 A 中的每个元素 x 有 $a \prec x$。

32. 令 aRb 表示 a 是 b 的后代。由练习 32，如果不存在 $n+1$ 个人的集合使得其中每个人都不是其他人的后代（一条反链），那么 $k \leqslant n$。因此这个集合可以被划分成 $k \leqslant n$ 条链。根据鸽巢原理，这些链中至少有一条链包含至少 $m+1$ 个人。

34. 我们通过反证法证明，如果 S 没有无限递减序列，且 $\forall x((\forall y(y \prec x \to P(y))) \to P(x))$，那么 $P(x)$ 对所有的 $x \in S$ 为真。如果 $P(x)$ 为真不是对所有的 $x \in S$ 成立，设 x_1 是一个使得 $P(x_1)$ 不为真的 S 的元素。那么根据已知的提示，一定是 $\forall y(y \prec x_1 \to P(y))$ 不为真。这意味着存在某个 $x_2(x_2 \prec x_1)$ 使得 $P(x_2)$ 不为真。再次使用这个提示，我们得到 $x_3 \prec x_2$ 使得 $P(x_3)$ 不为真，并且可以永远这样做下去。这与偏序集的良基性相矛盾。因此 $P(x)$ 对所有的 $x \in S$ 为真。

36. 假设 R 是近似序。因为 R 是自反的，如果 $a \in A$，那么有 $(a, a) \in R$，从而有 $(a, a) \in R^{-1}$。因此 $a \in R \cap R^{-1}$。于是 $R \cap R^{-1}$ 是自反的。对任何关系 R，$R \cap R^{-1}$ 是对称的，因为对任何关系 R，如果 $(a, b) \in R$ 那么有 $(b, a) \in R^{-1}$；反之也对。为证明 $R \cap R^{-1}$ 是传递的，假设 $(a, b) \in R \cap R^{-1}$ 并且 $(b, c) \in R \cap R^{-1}$。因为 R 是传递的，由 $(a, b) \in R$ 和 $(b, c) \in R$ 推出 $(a, c) \in R$。类似地，由 $(a, b) \in R^{-1}$ 和 $(b, c) \in R^{-1}$，就有 $(b, a) \in R$ 和 $(c, b) \in R$，因此 $(c, a) \in R$，从而 $(a, c) \in R^{-1}$。于是 $(a, c) \in R \cap R^{-1}$。从而证明了 $R \cap R^{-1}$ 是等价关系。

38. a)因为 $\mathrm{glb}(x, y) = \mathrm{glb}(y, x)$ 和 $\mathrm{lub}(x, y) = \mathrm{lub}(y, x)$，从而有 $x \wedge y = y \wedge x$ 和 $x \vee y = y \vee x$。

    b)使用定义，$(x \wedge y) \wedge z$ 是 x、y 与 z 的下界，且大于每一个其他的下界。因为 x、y 和 z 是可互换的，$x \wedge (y \wedge z)$ 是同一元素。类似地，$(x \vee y) \vee z$ 是 x、y 与 z 的上界并且小于每一个其他的上界。因为 x、y 和 z 是可互换的，$x \vee (y \vee z)$ 也是同一元素。

    c)为证明 $x \wedge (x \vee y) = x$，只需证明 x 是 x 与 $x \vee y$ 的最大下界。注意到 x 是 x 的下界，根据定义 $x \vee y$ 大于 x，x 也是它的下界。所以 x 是 x 与 $x \vee y$ 的下界。但是 x 的任何下界必须小于或等于 x，因此 x 是最大的下界。第二个公式是第一个公式的对偶式，证明省略。

    d)x 是自己与自己的下界，也是自己与自己的上界，并且也是其中的最大下界，最小上界。

40. a)因为 1 是大于或等于 1 的唯一元素，因此它也是 1 的唯一上界，因而也是 x 和 1 最小上界的唯一可能的值。

b)因为 $x \leqslant 1$，x 是 x 和 1 的下界并且没有其他的下界可能大于 x，因此 $x \wedge 1 = x$。

c)因为 $0 \leqslant x$，x 是 x 和 0 的上界并且没有其他的上界可能小于 x，因此 $x \vee 0 = x$。

d)因为 0 是小于或等于 0 的唯一元素，因此它也是 0 的唯一下界，因而也是 x 和 0 最大下界的唯一可能的值。

42. $L=(S, \supseteq)$，其中 $S=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

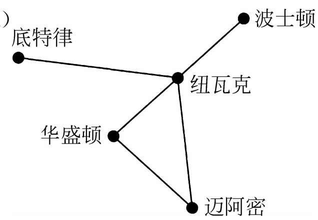
44. 是

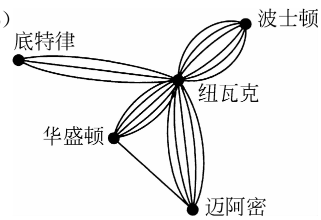
46. 子集 $X \subseteq S$ 的补是它的补集 $S-X$。为证明这一点，因为 $X \cup (S-X)=S$ 和 $X \cap (S-X)=\varnothing$，因此 $X \vee (S-X)=1$ 且 $X \wedge (S-X)=0$。

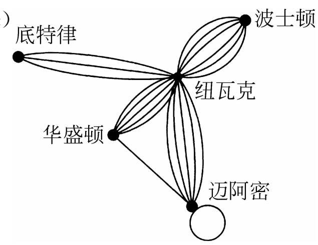
48. 考虑用直角坐标网格表示矩阵元素。数值从上到下，内部是从左向右。偏序是 $(a, b) \prec (c, d)$ iff $a \leqslant c$ 且 $b \leqslant d$。注意(1，1)是这个关系下的最小元素。第 1 章中解释的 Chomp 法则与这里导言所陈述的法则是一致的。但是现在对于所有的 a 和 b，其中 $1 \leqslant a \leqslant m$，$1 \leqslant b \leqslant n$，我们可以把点 (a, b) 视为自然数 $p^{a-1}q^{b-1}$。这就将直角坐标网格中的点视为这道练习中的集合 S，并且刚刚所描述的偏序 p 与划分关系相同，因为 $p^{a-1}q^{b-1} \mid p^{c-1}q^{d-1}$ 当且仅当左边 p 的指数不超过右边 p 的指数，q 的情况类似。

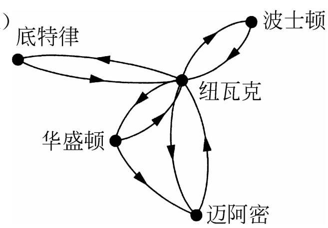
第 6 章

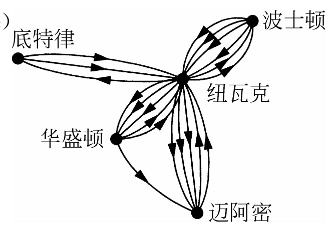
6.1 节

1. a)


b)


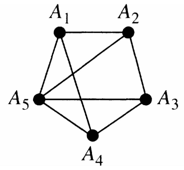
c)


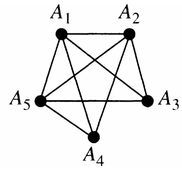
d)


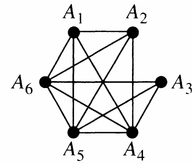
e)


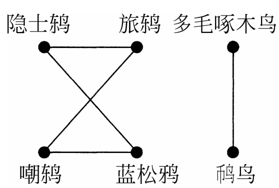
2. 简单图　3. 伪图　4. 有向图　5. 有向多重图

6. 如果 uRv，那么存在与 $\{u, v\}$ 相关联的边。但是 $\{u, v\}=\{v, u\}$，那么这条边与 $\{v, u\}$ 相关联，因而有 vRu。因此由定义知，R 是对称关系。一个简单图不允许有环，因此，vRu 不成立，所以由定义知，R 是非自反关系。

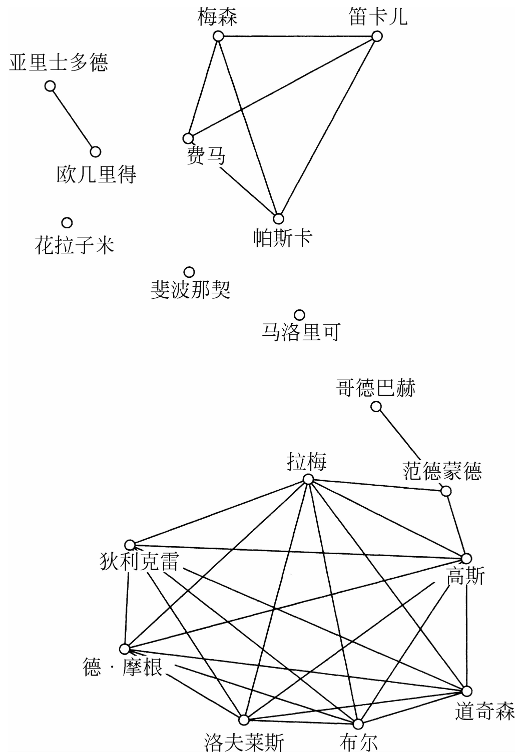
7. a)


b)


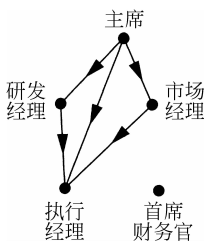
c)


8.


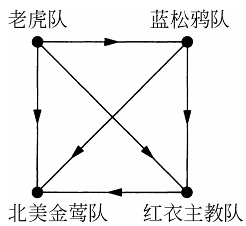
9.



10.



11.



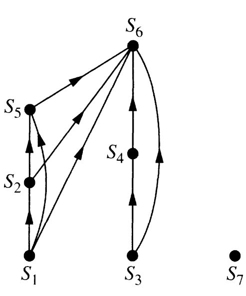
12. 找出在 2 月份的电话呼叫图中有但在 1 月份的电话呼叫图中却没有的电话号码，也找出在 1 月份有但在 2 月份却没有的号码。对于每个找出的号码，利用呼叫图中的边，列出每个号码的呼叫号码表或被叫号码表。检查这些表，以找出在与 1 月份停机的号码具有类似呼叫模式的 2 月份的新号码。

13. 利用这样的图模型，就是用电子邮件地址作为顶点，从发送地址到接收地址连一条边。对于每个电子邮件地址，可以建立其发送地址和接收地址表。如果两个电子邮件地址具有几乎相同的模式，就可以得出结论：这些地址可能属于同一个人，而该人最近改变了他或她的电子邮件地址。

14. 令 V 是参加聚会的人的集合，令 E 是 $V\times V$ 中有序对(u, v)的集合，满足 u 知道 v 的名字。图中的边是有向的，但不允许有多重边。字面上看，在顶点处有环，但是为简单起见，这个模型中可以忽略环。

15. 令顶点集合为人的集合，如果两个人结过婚，则把两个顶点用边连起来。忽略掉同性婚姻，这个图就具有这样的性质，即有两种类型的顶点(男人和女人)，每条边都连接相反类型的顶点。

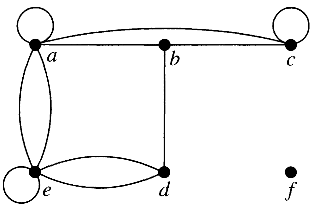
16.



17. 用顶点表示组里的人们。对每对顶点来说，都在图里放置一条有向边。对从表示 A 的顶点到表示 B 的顶点的边来说，若 A 喜欢 B，则用＋(加)标记，若 A 不喜欢 B，则用－(减)标记，若 A 对 B 持中立态度，则用 0 标记。

6.2 节

1. $v=6$；$e=6$；$\deg(a)=2$，$\deg(b)=4$，$\deg(c)=1$，$\deg(d)=0$，$\deg(e)=2$，$\deg(f)=3$；c 是悬挂点；d 是孤立点。
2. $v=9$；$e=12$；$\deg(a)=3$，$\deg(b)=2$，$\deg(c)=4$，$\deg(d)=0$，$\deg(e)=6$，$\deg(f)=0$；$\deg(g)=4$；$\deg(h)=2$；$\deg(i)=3$；d 和 f 都是孤立点。
3. 否，因为顶点的度之和不可能是奇数。
4. $v=4$；$e=7$；$\deg^-(a)=3$，$\deg^-(b)=1$，$\deg^-(c)=2$，$\deg(d)=1$，$\deg^+(a)=1$，$\deg^+(b)=2$，$\deg^+(c)=1$，$\deg^+(d)=3$。
5. 5 个顶点，13 条边；$\deg^-(a)=6$，$\deg^+(a)=1$，$\deg^-(b)=1$，$\deg^+(b)=5$，$\deg^-(c)=2$，$\deg^+(c)=5$，$\deg^-(d)=4$，$\deg^+(d)=2$，$\deg^-(e)=0$，$\deg^+(e)=0$。
6.

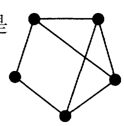


7. v 具有的合作者人数；从来没有合作过的某个人；只有一个合作者的某个人。
8. 在有向图中 $\deg^-(v)=v$ 收到的呼叫次数，$\deg^+(v)=v$ 发出的呼叫次数；在无向图中 $\deg(v)=$是 v 发出或收到的呼叫次数。
9. $(\deg^+(v), \deg^-(v))$是 v 的胜负记录。
10. 偶图　　11. 非偶图　　12. 非偶图
13. a)令 $V=${Zamora，Agraharam，Smith，Chou，Macintyre，策划，宣传，销售，市场，开发，工业关系}，$E=${{Zamora，策划}，{Zamora，销售}，{Zamora，市场}，{Zamora，工业关系}，{Agraharam，策划}，{Agraharam，开发}，{Smith，宣传}，{Smith，销售}，{Smith，工业关系}，{Chou，策划}，{Chou，销售}，{Chou，工业关系}，{Macintyre，策划}，{Macintyre，宣传}，{Macintyre，销售}，{Macintyre，工业关系}}。

    b)答案有许多可能，如 Zamora－策划，Agraharam－开发，Smith－宣传，Chou－销售，以及 Macintyre－工业关系。
14. a)n 个顶点，$n(n-1)/2$ 条边　　b)n 个顶点，n 条边　　c)$n+1$ 个顶点，$2n$ 条边

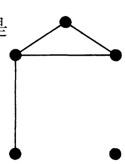
    d)$m+n$ 个顶点，mn 条边　　e)2^n 个顶点，$n2^{n-1}$ 条边
15. a)3，3，3，3　　b)2，2，2，2　　c)4，3，3，3，3

    d)3，3，2，2，2　　e)3，3，3，3，3，3，3，3
16. n 个顶点中每个都与另外 $n-1$ 个顶点中的每个相邻，因此度序列是 $n-1$，$n-1$，…，$n-1$(n 项)。
17. 7
18. a)是

    b)否，度之和是奇数。　　c)否　　d)否，度之和是奇数。

    e)是

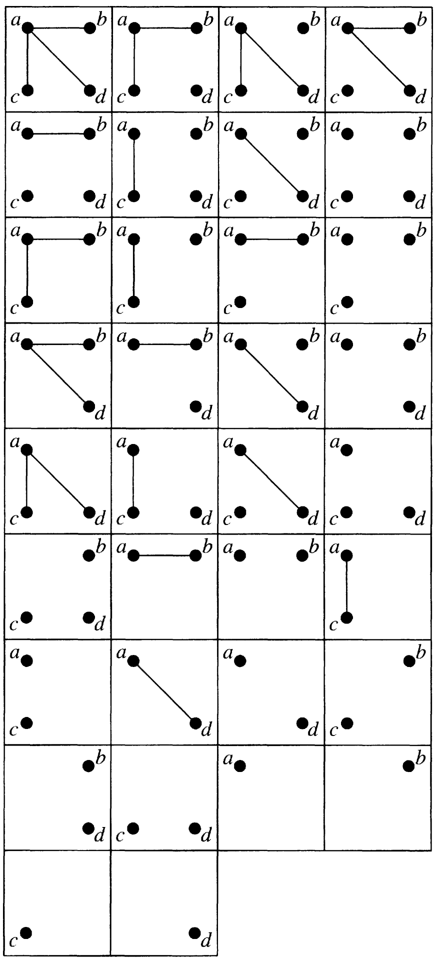
    

    f)否，度之和是奇数。
19. 首先假设 d_1，d_2，…，d_n 是成图序列。我们必须证明如果项为 d_2-1，d_3-1，…，$d_{d_1+1}-1$，d_{d_1+2}，

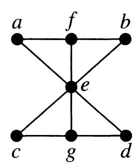
d_{d_1+3}，…，d_n 的序列可以按非递增顺序排列，那么这个序列是成图序列。我们知道，如果原序列是成图序列，那么存在具有这个度序列的成图序列，其中度 d_1 的顶点与度 d_2，d_3，…，d_{d_1+1} 的顶点相邻。从图中去掉有最高度(d_1)的顶点，得到的图就具有所要求的度序列。反之，假设 d_1，d_2，…，d_n 是非递增序列，满足只要序列 d_2-1，d_3-1，…，$d_{d_1+1}-1$，d_{d_1+2}，d_{d_1+3}，…，d_n 按非递增顺序排列，它就是成图序列。考虑后者为度序列的图，其中对于 $2\leqslant i\leqslant d_1+1$，顶点 v_i 的度为 d_i-1，对于 $d_1+2\leqslant i\leqslant n$，顶点 v_i 的度为 d_i。连接一个新顶点(记作 v_1)，并且从 v_1 向 v_2，v_3，…，v_{d_1+1} 中的每个顶点做一条边，所得到的图的度序列就是 d_1，d_2，…，d_n。

20. 令 d_1，d_2，…，d_n 是和为偶数的非递增非负整数序列。构造图如下：取顶点 v_1，v_2，…，v_n，在顶点 v_i 处有 $\lfloor d_i/2\rfloor$ 个环，其中 $i=1$，2，…，n。对于每个 i，顶点 v_i 的度要么是 d_i 要么是 d_i-1。因为最初的和为偶数，所以 $\deg(v_i)=d_i-1$ 是偶数。把它们任意配对，并且用一条边连接每对中的顶点。

21. 17

22. 

23. a)对所有 $n\geqslant 1$　　b)对所有 $n\geqslant 3$　　c)对 $n=3$　　d)对所有 $n\geqslant 0$

24. 5　　25. 

26. a)带 n 个顶点而且没有边的图。　　b)K_m 和 K_n 的不相交并图。

c)带有顶点 $\{v_1$，…，$v_n\}$ 而且在 v_i 与 v_j 之间有边(除非 $i\equiv j\pm 1 \pmod n$)的图。

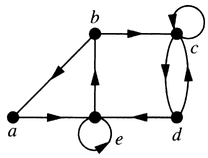
d)用长度为 n 的位串表示其顶点，若两个顶点所对应的位串相差超过一位，则在这两个顶点之间有一条边的图。

27. $v(v-1)/2-e$

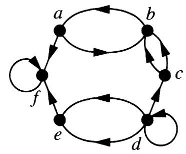
28. $n-1-d_n$，$n-1-d_{n-1}$，…，$n-1-d_2$，$n-1-d_1$

29. G 和 $\overline{G}$ 的并图包含 n 个顶点中每对顶点之间的一条边。因此这个并图是 K_n。

30. 练习 4：

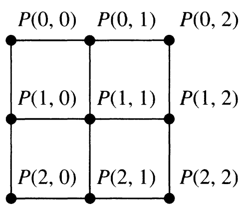


练习 5：



31. 有向图 $G=(V, E)$ 是它自身的逆图当且仅当它满足条件：$(u, v)\in E$ 当且仅当 $(v, u)\in E$。但这恰好是这样的条件：所对应的关系必定是对称的。

32.



33. 可以这样连接 $P(i, j)$与 $P(k, l)$：用 $|i-k|$ 个 hop 连接 $P(i, j)$与 $P(k, j)$，用 $|j-l|$ 个 hop 连接 $P(k, j)$与 $P(k, l)$。因此连接 $P(i, j)$与 $P(k, l)$所需要的 hop 总数不超过 $|i-k|+|j-l|$。这个值小于或等于 $m+m=2m$，它是 $O(m)$。

6.3 节

1.

顶点	相邻顶点
a	b，c，d
b	a，d
c	a，d
d	a，b，c

2.

顶点	相邻顶点
a	a，b，c，d
b	d
c	a，b
d	b，c，d

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，其中顶点都以字母表顺序排列

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

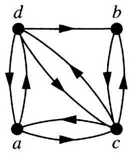
b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

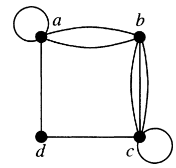
e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6. 

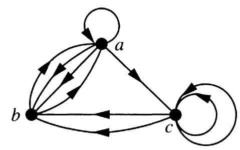
7. $\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&2\\1&1&0&1\\0&2&1&0\end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&2\\2&1&1&0\\1&2&0&1\end{bmatrix}$

9. 

10. $\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix}1&1&2&1\\1&0&0&2\\1&0&1&1\\0&2&1&0\end{bmatrix}$

12. 

13. 是

14. 练习 7：$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&0\\1&1&0&0&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}$　练习 8：$\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&0&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&1&1&0&1\end{bmatrix}$

15. $\deg(v)-$在 v 处的环数；$\deg^{-}(v)$

16. 若 e 不是环则是 2，若 e 是环则是 1。

17. 同构　18. 同构　19. 同构　20. 非同构　21. 同构

22. G 通过恒等函数与自身同构，所以同构是自反的。假设 G 同构于 H，则存在从 G 到 H 的一一对应 f，f 保持相邻性与非相邻性。所以 f^{-1} 是从 H 到 G 的一一对应，f^{-1} 保持相邻性与非相邻性。因此同构是对称的。若 G 同构于 H 并且 H 同构于 K，则存在从 G 到 H 和从 H 到 K 的一一对应 f 和 g，f 和 g 保持相邻性与非相邻性。所以 $g\circ f$ 是从 G 到 K 的一一对应 f，$g\circ f$ 保持相邻性与非相邻性。因此同构是传递的。

23. 全是 0

24. 这样标记顶点，使得顶点集划分中第一个集合的所有顶点都排在前面。由于没有边连接同一划分集内的顶点，所有矩阵具有所需形式。

25. C_5　26. 只有 $n=5$　27. 4 个

28. a)同构　b)非同构　c)非同构

29. $G=(V_1, E_1)$同构于 $H=(V_2, E_2)$，当且仅当存在从 V_1 到 V_2 的函数 f 和从 E_1 到 E_2 的函数 g，使得 f 和 g 都是一一对应，并且对于 E_1 中的每条边 e，$g(e)$的端点是 $f(v)$和 $f(w)$，其中 v 和 w 是 e 的端点。

30. 同构　31. 同构

32. 若 f 是从有向图 G 到有向图 H 的同构，则 f 也是从 G^c 到 H^c 的同构。为了看出这一点，注意(u, v)是 G^c 的边，当且仅当(u, v)是 G 的边，当且仅当$(f(u), f(v))$是 H 的边，当且仅当$(f(u), f(v))$是 H^c 的边。

33. 答案可能有很多，例如 C_6 和 $C_3\cup C_3$。

34. 乘积矩阵是$[a_{ij}]$，其中当 $i\neq j$ 时，a_{ij} 是从 v_i 到 v_j 的边数，a_{ii} 是与 v_i 关联的边数。

6.4 节

1. a)长度为 4 的通路；非回路；非简单通路　b)非通路
   c)非通路　d)长度为 5 的简单回路

2. 非连通　3. 非连通

4. 具有下列性质的人的极大集：对于其中任意二人，可以找到从一个人通向另一个人的熟人关系串。

5. 如果一个人的爱尔特希数为 n，则在合作关系图中存在从该人到爱尔特希的长为 n 的路径，根据定义，这意味着该人与爱尔特希在同一个分支中。如果一个人与爱尔特希在同一个分支中，则存在从该人到爱尔特希的路径，最短的这种路径的长度就是该人的爱尔特希数。

6. a)弱连通　b)弱连通　c)不是强连通也不是弱连通

7. 电话号码的极大集，对于其中任意两个不同的号码，可以找出二者之间的有向路径。

8. 求下列每个图的强连通分支。
   a)$\{a, b, f\}$，$\{c, d, e\}$　b)$\{a, b, c, d, e, h\}$，$\{f\}$，$\{g\}$　c)$\{a, b, d, e, f, g, h, i\}$，$\{c\}$

9. a)2　b)7　c)20　d)61

10. 不是同构的(G 有一个三角形关系，而 H 没有)
11. 不是同构的(通路 u_1，u_2，u_7，u_6，u_5，u_4，u_3，u_8，u_1 对应于通路 v_1，v_2，v_3，v_4，v_5，v_8，v_7，v_6，v_1)。
12. a)3　　b)0　　c)27　　d)0
13. 由定义，R 是自反的。假设$(u，v)\in R$，则存在从 u 到 v 的通路。于是$(v，u)\in R$，因为存在从 v 到 u 的通路，即从 u 到 v 的通路的倒转。所以 R 是对称的。假设$(u，v)\in R$ 且$(v，w)\in R$，则存在从 u 到 v 和从 v 到 w 的通路。把这两条通路合在一起就给出从 u 到 w 的通路，因此$(u，w)\in R$，所以 R 是传递的。
14. c
15. b，c，e，i
16. 如果一个顶点是悬挂点，显然它不是割点。所以割边的端点是割点就不是悬挂点。删除一条割边，产生比原图有更多连通分支的图，如果割边的端点不是悬挂点，则在删除割边后，该端点所在的连通分支就不只含有这一个顶点。因此，删除该顶点及其关联的所有边，包括原来那条割边，就产生比原图有更多连通分支的图。因此，割边的端点不是悬挂点就是割点。
17. 假设连通图 G 至多有 1 个顶点不是割点。定义顶点 u 和 v 之间的距离(记作 $d(u，v)$)是 G 中 u 与 v 之间最短通路的长度。设 s 和 t 是 G 中使得 $d(s，t)$最大的顶点。s 或 t 之一(或二者都)是割点。所以不失一般性，假设 s 是割点。在从 G 删除 s 及其关联边所得到的图中，设 w 属于不含 t 的那个连通分支。由于从 w 到 t 的每条通路都含有 s，所以 $d(w，t)>d(s，t)$，这是矛盾。
18. a)丹佛-芝加哥，波士顿-纽约

    b)西雅图-波特兰，波特兰-旧金山，盐湖城-丹佛，纽约-波士顿，波士顿-伯灵顿，波士顿-班戈
19. 一组人合起来能(直接或间接)影响每个人；{Deborah}
20. 一条边不能连接不同连通分支内的两个顶点。由于在有 n_i 个顶点的连通分支内至多有$C(n_i，2)$条边，所以图中至多有 $\sum_{i=1}^{k} C(n_i，2)$条边。
21. 假设 G 不连通。则有一个连通分支有 k 个顶点，$1\leqslant k\leqslant n-1$。$G$ 的边数最多为 $C(k，2)+C(n-k，2)=(k(k-1)+(n-k)(n-k-1))/2=k^2-nk+(n^2-n)/2$。这个 k 的二次函数在 $k=n/2$ 处最小，在 $k=1$ 或 $k=n-1$ 处最大。因此，若 G 不连通，则边数不超过这个函数在 1 和 $n-1$ 处的值，即$(n-1)(n-2)/2$。
22. a)1　　b)2　　c)6　　d)21
23. 2
24. 设通路 P_1 和 P_2 分别是 $u=x_0$，x_1，…，$x_n=v$ 和 $u=y_0$，y_1，…，$y_m=v$。由于 P_1 和 P_2 不含公共边，所以迟早会分开。如果在其中一条通路结束后才分开，则另一条通路的剩余部分就是从 v 到 u 的回路。否则，假设 $x_0=y_0$，$x_1=y_1$，…，$x_i=y_i$，但是 $x_{i+1}\neq y_{i+1}$。沿着通路 y_i，y_{i+1}，y_{i+2}，…前进，直到再次遇到 P_1 上的顶点为止。一旦回到 P_1，就沿着 P_1 向前或向后(视需要而定)，直到回到 x_i。由于$x_i=y_i$，这样形成的回路必定是简单的，因为诸 x_k 之间的边没有重复，而且这些边也不同于所用到的诸 y_i 之间的边。
25. 图是连通的当且仅当 $\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^3+\cdots+\mathbf{A}^{n-1}$ 的对角线外元素都是正的，其中 $\mathbf{A}$ 是 G 的邻接矩阵。
26. 如果图是偶图，不妨设顶点分成 A 和 B 两部分，则每条通路上的顶点必定交替属于 A 和 B。因此，从比方说 A 出发的通路在奇数步后停在 B，在偶数步后停在 A。由于回路总是停在出发的同一个顶点上，所以长度必为偶数。反之，假设所有回路长度都是偶数，要证图是偶图。可以假设图是连通的，因为若不连通，则每次仅考虑一个连通分支即可。设 v 是图的一个顶点，设 A 是有从 v 出发奇数长度通路的所有顶点的集合，设 B 是有从 v 出发偶数长度通路的所有顶点的集合。由于这个分支是连通的，所以每个顶点都属于 A 或 B。没有顶点同时属于 A 和 B，因为那样一来，从 v 到那个顶点的奇长度通路，加上从那个顶点到 v 的偶长度通路，就产生一个奇回路，与假设矛盾。因此，顶点集合划分成两部分。为了证明每条边的端点都在不同部分中，假设 xy 是一条边，其中 $x\in A$。则从 v 到 x 的奇长度通路加上 xy，就产生从 v 到 y 的偶长度通路，所以 $y\in B$。(若 $x\in B$，也类似可证。)

6.5 节

1. 均无
2. 无欧拉回路；a，e，c，e，b，e，d，b，a，c，d
3. a，b，c，d，c，e，d，b，e，a，e，a
4. a，i，h，g，d，e，f，g，c，e，h，d，c，a，b，i，c，b，h，a

5. 不能，A 仍然是奇数度的。
6. 当顶点表示交叉路口，边表示街道的图有欧拉通路时。
7. 能一笔画　　8. 不能一笔画
9. 如果有欧拉通路，则沿着该通路前进时，除起点和终点外的每个顶点都有相同的入度和出度，因为每当沿一条边进入一个顶点时，还要沿另一条边离开它。起点必定是出度比入度大 1，因为用一条边离开这个顶点，而每当再次访问它时，要用一条边进入和一条边离开。同理，终点必定是入度比出度大 1。由于不考虑方向的欧拉通路在无向底图中产生任意两个顶点之间的通路，所以该图是弱连通的。反之，假设图满足题设条件。如果从出度小的顶点到入度小的顶点之间增加一条边，则该图每个顶点入度与出度相等。由于该图仍然是弱连通的，根据练习 16，这个新图有欧拉回路。现在删除后加的边，就得到欧拉通路。
10. 均无
11. 无欧拉回路；a，d，e，d，b，a，e，c，e，b，c，b，e
12. 均无
13. 与算法 1 的过程基本相同，要考虑遵循边的方向。
14. 练习 1：1 次；练习 2～4：0 次
15. a，b，c，d，e，a 是哈密顿回路。
16. 不存在哈密顿回路，因为一旦这样的回路到达 e，就无路可走了。
17. 不存在哈密顿回路，因为图中每条边都与 2 度点关联，因此必须在该回路上。
18. $m=n\geqslant 2$
19. a)不能；不能；无　　b)不能；不能；有　　c)能；能；有　　d)能；能；有
20. 对于 $n=1$，结果是平凡的，编码是 0，1。假设存在 n 阶格雷码，设 c_1，c_2，…，c_k 是这样的编码，$k=2^n$。则 $0c_1$，$0c_2$，…，$0c_k$，$1c_1$，$1c_2$，…，$1c_k$ 是 $n+1$ 阶格雷码。
21. **procedure** *Fleury*($G=(V, E)$：连通多重图，所有顶点度为偶数，$V=\{v_1, \cdots, v_n\}$)

$v := v_1$

circuit $:= v$

$H := G$

while H 有边

begin

　$e :=$ 若 H 中存在端点为 v 且不是 H 中割边的边，则是第一条这样的边(按照 V 的排序)，否则就是 H 中端点为 v 的第一条边

　$w := e$ 的另一个端点

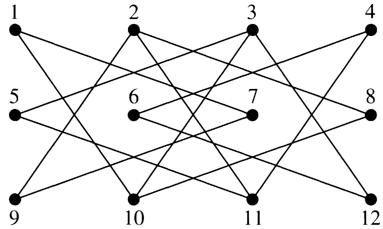
　circuit $:=$ *circuit* 加入边 e 和顶点 w

　$v := w$

　$H := H - e$

end\{*circuit* 是欧拉回路\}

22. 若 G 有欧拉回路，则该回路也是欧拉通路。若无欧拉回路，则在两个奇数度顶点之间加一条边，应用算法求出欧拉回路。然后删除新加的边。
23. 假设 $G=(V, E)$是满足 $V=V_1\cup V_2$ 的偶图，其中没有边是连接 V_1 里的顶点与 V_2 里的顶点的。假设 G 有哈密顿回路。这样的回路必然是形如 a_1，b_1，a_2，b_2，…，a_k，b_k，a_1，b_1，其中对 $i=1, 2, \cdots, k$ 来说，有 $a_i\in V_1$ 和 $b_i\in V_2$。因为哈密顿回路访问每个顶点恰好一次，除了回路开始和结束的 a_1 之外，所以图中的顶点数等于 $2k$，它是偶数。因此，带奇数个顶点的偶图不可能有哈密顿回路。
24.



25. 把 3×4 棋盘的格子表示如下：

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

马的巡回路线可以通过下列移动来构成：8，10，1，7，9，2，11，5，3，12，6，4。

26. 把 4×4 棋盘的格子表示如下：

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

从角上的四个格子里只有两种移动。若包含 1-10，1-7，16-10 和 16-7 的所有边，则过早地完成了回路，所以必须去掉这些边中的至少一条。不失一般性，假设通路开始于 1-10，10-16 和 16-7。现在从格子 3 仅有的移动是到格子 5，10 和 12，而格子 10 已经有了两条关联的边。因此 3-5 和 3-12 必须是在哈密顿回路里。同理，边 8-2 和 8-15 必须是在回路里。现在从格子 9 仅有的移动是到格子 2，7 和 15。假如有从格子 9 到格子 2 和 15 的边，则过早地完成了回路。因此边 9-7 必须是在回路里，让格子 7 关联的边达到饱和。但是现在格子 14 被迫连接到格子 5 和 12，过早地完成了回路(5-14-12-3-5)。这个矛盾证明在 4×4 棋盘上没有马的巡回路线。

27. a)如果 G 没有哈密顿回路，则不断地尽量把 G 没有的边逐条加入 G，条件是产生的图不含哈密顿回路。不可能一直这样做下去，因为一旦把 G 没有的所有边都加入了，就形成了完全图，就有了哈密顿回路。到这个过程停止时，就得到了具有所需要性质的图 H(肯定是非完全的)。

b)再给 H 加入一条边。这样就产生了经过所加入的边的哈密顿回路。从这个回路上去掉加入的边所形成的通路，就是 H 中的哈密顿通路。

c)显然 v_1 与 v_n 在 H 中不相邻，因为 H 没有哈密顿回路。因此 v_1 与 v_n 在 G 中不相邻。但是假设了在 G 中不相邻顶点的度之和至少为 n。这个不等式可以改写成 $n-\deg(v_n)\leqslant\deg(v_1)$。但 $n-\deg(v_n)$ 正是不与 v_n 相邻的顶点数。

d)由于在哈密顿通路上 v_n 没有后续顶点，所以 v_n 不属于 S。与 v_1 相邻的 $\deg(v_1)$ 个顶点中每个顶点都引出一个 S 元素，所以 S 包含 $\deg(v_1)$ 个顶点。

e)根据(c)部分，至多有 $\deg(v_1)-1$ 个与 v_n 不同且不与 v_n 相邻的顶点，根据(d)部分，S 中有 $\deg(v_1)$ 个顶点，这些顶点都不是 v_n。因此至少有一个 S 中的顶点与 v_n 相邻。根据定义，如果 v_k 是这个顶点，则 H 包含边 v_kv_n 和 v_1v_{k+1}，其中 $1<k<n-1$。

f)现在 v_1，v_2，…，v_{k-1}，v_k，v_n，v_{n-1}，…，v_{k+1}，v_1 是 H 中的哈密顿回路，与 H 的构造矛盾。因此 G 原来没有哈密顿回路的假设是错误的，反证法完成了。

6.6 节

1. a)顶点是车站，边连接相邻车站，权是相邻车站之间旅行所需要的时间。

b)与(a)基本相同，不同之处在于，权是相邻车站之间的距离。

c)与(a)基本相同，不同之处在于，权是车站之间的票价。

2. 16

3. a，c，d，e，g，z

4. a)经芝加哥　b)经芝加哥　c)经洛杉矶　d)经芝加哥

5. a)经芝加哥　b)经芝加哥　c)经洛杉矶　d)经芝加哥。

6. 当把 z 加入集合 S 时，算法不停止。

7. a)经木桥，经木桥和康登　b)经木桥，经木桥和康登

8. 例如，观光路线，清扫街道

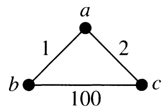
9.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**z**
a	4	3	2	8	10	13
b	3	2	1	5	7	10
c	2	1	2	6	8	11
d	8	5	6	4	2	5
e	10	7	8	2	4	3
z	13	10	11	5	3	6

10. $O(n^3)$

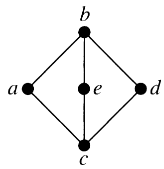
11. a-c-b-d-a（或者从某个点开始，以相同或相反顺序遍历这些顶点的相同回路）

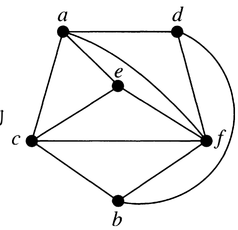
12. 旧金山－丹佛－底特律－纽约－洛杉矶－旧金山（或者从某个点开始，以相同或相反顺序遍历这些顶点的相同回路）

13. 考虑这个图：

回路 a-b-a-c-a 访问每个顶点至少一次（访问顶点 a 两次），总权为 6。每个哈密顿回路有总权 103。

6.7 节

1. 能　　2. 

3. 非可平面的　　4. 可平面的 

5. 非可平面的

6. 由连接 v_1，v_2，v_3 的边组成的 K_5 子图，其平面表示形成一个三角形。顶点 v_4 要么在三角形之内，要么在三角形之外。下面只考虑 v_4 在三角形内的情形，另一种情形是类似的。画出从 v_1，v_2，v_3 到 v_4 的边，就一共形成 4 个区域。无论 v_5 在哪个区域中，都只能让 v_5 与其余顶点中的 3 个顶点相连，而不能与所有 4 个顶点相连。

7. 8

8. 由于没有环和多重边，也没有长度为 3 的回路，而且无界区域的次数至少为 4，所以每个区域的次数至少为 4。因此，$2e \geqslant 4r$，或 $r \leqslant e/2$。但是 $r = e - v + 2$，所以有 $e - v + 2 \leqslant e/2$，这蕴含着 $e \leqslant 2v - 4$。

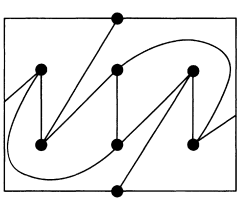
9. 与推论 2 中一样，有 $2e \geqslant 5r$ 和 $r = e - v + 2$，因此 $e - v + 2 \leqslant 2e/5$，这蕴含着 $e \leqslant (5/3)v - (10/3)$。

10. 只有 a）和 c）　　11. 不同胚于 $K_{3,3}$　　12. 可平面的　　13. 非可平面的

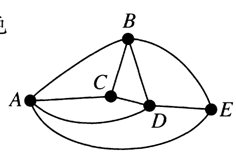
14. a）1　　b）3　　c）9　　d）2　　e）4　　f）16

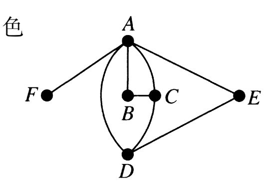
15. 按照提示来画 $K_{m,n}$。交叉数是第一象限中数目的 4 倍。在 x 轴上原点右边的顶点是 $(1, 0)$，$(2, 0)$，…，$(m/2, 0)$，在 y 轴上原点上边的顶点是 $(0, 1)$，$(0, 2)$，…，$(0, n/2)$。选择任意两个不同的数 a 和 b，$1 \leqslant a < b \leqslant m/2$，以及两个不同的数 r 和 s，$1 \leqslant r < s \leqslant n/2$，就得出所有的交叉。在图中连接 $(a, 0)$ 和 $(0, s)$ 的边与连接 $(b, 0)$ 和 $(0, r)$ 的边之间，恰好产生一处交叉。因此，在第一象限中的交叉数是 $C\left(\frac{m}{2}, 2\right) \cdot C\left(\frac{n}{2}, 2\right) = \frac{(m/2)(m/2-1)}{2} \cdot \frac{(n/2)(n/2-1)}{2}$。因此，总交叉数是 $4 \cdot mn(m-2)(n-2)/64 = mn(m-2)(n-2)/16$。

16. a）2　　b）2　　c）2　　d）2　　e）2　　f）2

17. 

6.8 节

1. 4 色 

2. 3 色 

3. 3　　4. 3　　5. 2　　6. 3

7. 没有边的图　　8. 3(若 n 为偶数)，4(若 n 为奇数)

9. 时间段 1：Math 115，Math 185；时间段 2：Math 116，CS 473；时间段 3：Math195，CS 101；时间段 4：CS 102；时间段 5：CS 273

10. 5

11. 练习 3：3，练习 4：3，练习 5：3，练习 6：4

12. 5

13. 颜色 1：e，f，d；颜色 2：c，a，i，g；颜色 3：h，b，i

14. 给 C_6 着色

15. 当 n 是大于 1 的奇数时，需要四种颜色为 W_n 着色，因为对于圈图，需要三种颜色着色(见例 4)，并且还有一个与所有圈图顶点相邻的中心顶点，这样就要求四种颜色。为了看到如何通过删去用三种颜色着色的边来从 W_n 获得这个图，考虑两种情况。如果我们移除一条圈图边，那么我们可以用两种颜色来给圈图着色，并且剩下的圈图部分可以交替使用这两种颜色。第三种颜色用来给中心点着色。如果我们移除一条轮辐(spoke)边，那么我们可以用 ♯1 颜色给圈图移除边的终点着色，交替使用 ♯2 和 ♯3 颜色给圈图其余顶点着色，然后用 ♯1 颜色给中心顶点着色。

16. 假设 G 是着色 k 关键的，但有一个度为 $k-2$ 或小于 $k-2$ 的顶点 v。从 G 中删去一条与 v 相伴的边。由 k 关键的定义知，得到的图可以用 $k-1$ 种颜色着色。现在恢复这条缺少的边，并对所有除 v 外的顶点使用这种着色。因为我已经有针对这个更小图的适当着色，没有两个邻接的顶点有相同的颜色。而且，v 至多有 $k-2$ 个邻居，所以我们可以用一个没有用过的颜色着色 v，以得到 G 的一个合适的$(k-1)$着色。这与 G 的着色数是 k 矛盾。因此，我们的假设不成立，G 的每个顶点的度必须至少为 $k-1$。

17. a)6　　b)7　　c)9　　d)11

18. 用颜色表示频率，用顶点表示地段。如果两个顶点表示的地段互相干涉，则用边连接这两个顶点。于是 k 重着色恰好就是避免了干涉的频率分配。

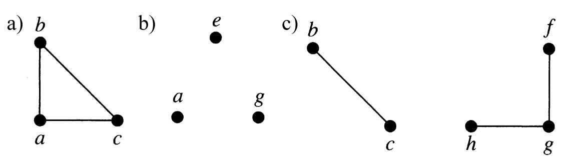
19. 我们按照提示来解答。因为五角形的内角和为 540°，所以不存在 3 个超过 180°的内角(优角)，如果五角形中没有优角，那么五角形是凸的，并且位于任意顶点的守卫可以看到所有的点。如果五角形中有一个优角，那么五角形必然看起来像下面的图(a)，并且顶点 v 处的守卫可以看到所有的点。如果五角形中有两个优角，那么它们可能相邻，也可能不相邻(如图(b)和(c)所示)，在两种情形的任一情形下，顶点 v 处的守卫可以看到所有的点。[在图(c)中，选择优角更接近于底边。]因此，对于所有五角形，一个守卫足够了，所以 $g(5)=1$。

20. 这幅图暗示提示中(对任意 $k\geqslant 1$，有 k 齿尖)有 $3k$ 个顶点。不同齿尖可见的位置集合是不相交的。因此，k 个齿尖中每个都需要一个单独的守卫，这样至少需要 k 个守卫。这表明 $g(3k)\geqslant k=\lfloor 3k/3\rfloor$。如果 $n=3k+i$，其中 $0\leqslant i\leqslant 2$，那么 $g(n)\geqslant g(3k)\geqslant k=\lfloor n/3\rfloor$。

补充练习

1. 2500　　3. 同构　　5. 同构

7. $\sum_{i=1}^{m} n_i$ 个顶点，$\sum_{i<j} n_i n_j$ 条边

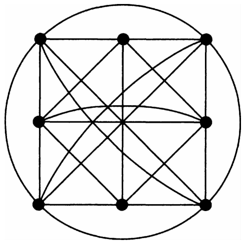
9. 

11. 完全子图含有下列顶点集合：$\{b, c, e, f\}$，$\{a, b, g\}$，$\{a, d, g\}$，$\{d, e, g\}$，$\{b, e, g\}$

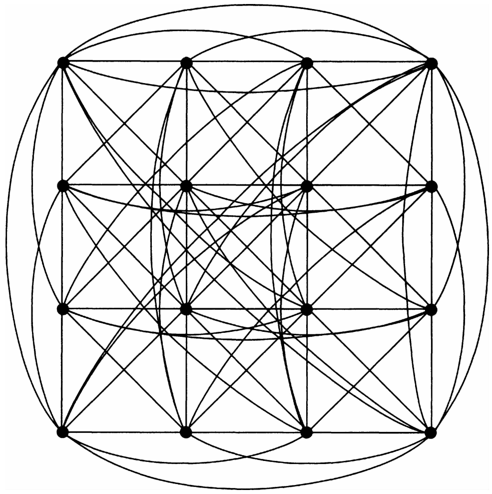
13. 完全子图含有下列顶点集合：$\{b, c, d, j, k\}$，$\{a, b, j, k\}$，$\{e, f, g, i\}$，$\{a, b, i\}$，$\{a, i, j\}$，$\{b, d, e\}$，$\{b, e, i\}$，$\{b, i, j\}$，$\{g, h, i\}$，$\{h, i, j\}$

15. $\{c, d\}$是最小支配集

17. a)



b)



19. a)1　　b)2　　c)3

21. a)图 G 中从 u 到 v 的路径导出同构图 H 中从 $f(u)$到 $f(v)$的路径。

b)假设 f 是从 G 到 H 的同构映射。若 v_0，v_1，…，v_n，v_0 是 G 中的哈密顿回路，则 $f(v_0)$，$f(v_1)$，…，$f(v_n)$，$f(v_0)$必为 H 中的哈密顿回路，因为它还是回路并且对于 $0 \leqslant i < j \leqslant n$，$f(v_i) \neq f(v_j)$。

c)假设 f 是从 G 到 H 的同构映射。若 v_0，v_1，…，v_n，v_0 是 G 中的欧拉回路，则 $f(v_0)$，$f(v_1)$，…，$f(v_n)$，$f(v_0)$必为 H 中的欧拉回路，因为它还是过每条边恰好一次的回路。

d)两个同构图必有相同的交叉数，因为它们可用完全相同的方式画在平面上。

e)假设 f 是从 G 到 H 的同构映射，则 v 在 G 中是孤立点当且仅当 $f(v)$在 H 中是孤立点。因此这两个图必有相同的孤立点数。

f)假设 f 是从 G 到 H 的同构映射。若 G 是偶图，则 G 的顶点集可划分成 V_1 和 V_2，使得没有边连接一个 V_1 中的顶点和一个 V_2 中的顶点。于是 H 的顶点集可划分成 $f(V_1)$和 $f(V_2)$，使得没有边连接一个 $f(V_1)$中的顶点和一个 $f(V_2)$中的顶点。

23. 3 种

25. a)自逆　　b)非自逆

27. 不可定向　　29. 可定向

31. 如果 e 是端点为 u 和 v 的割边，那么若 e 的方向是从 u 到 v，则在该有向图中没有从 v 到 u 的路径，否则 e 就不是割边。若 e 的方向是从 v 到 u，则可做类似的推理。

33. $n-1$

35. 让顶点表示鸡，图中有边(u, v)当且仅当鸡 u 比鸡 v 占优势。

37. a)4　　b)2　　c)3　　d)4　　e)4　　f)2

39. a)假设 $G=(V, E)$，设 a，$b \in V$。要证明 a 和 b 在 $\overline{G}$ 中距离至多为 2。若$\{a, b\} \notin E$，则此距离为 1，所以假设$\{a, b\} \in E$。由于 G 的直径大于 3，所以存在顶点 u 和 v，使得 u 和 v 之间在 G 中的距离大于 3。u 或 v 二者之一或全部都不属于集合$\{a, b\}$。假设 u 与 a，b 不同，则$\{a, u\}$或$\{b, u\}$之一属于 E；否则 a，u，b 就是 $\overline{G}$ 中长度为 2 的路径。所以，不失一般性，假设$\{a, u\} \in E$。因此 v 不是 a 或 b，而根据同样的推理，要么$\{a, v\} \in E$，要么$\{b, v\} \in E$。无论哪种情形，都给出 G 中从 u 到 v 长度小于等于 3 的路径，这是矛盾。

b)假设 $G=(V, E)$，设 a，$b \in V$。要证明 a 和 b 在 $\overline{G}$ 中距离不超过 3。若$\{a, b\} \notin E$，则得出所要结果，所以假设$\{a, b\} \in E$。由于 G 的直径大于等于 3，所以存在顶点 u 和 v，使得 u 和 v 之间在 G 中的距离大于等于 3。u 或 v 二者之一或全部都不属于集合$\{a, b\}$。假设 u 与 a，b 不同。要么$\{a, u\} \in E$，要么$\{b, u\} \in E$；否则 a，u，b 就是 $\overline{G}$ 中长度为 2 的路径。所以，不失一般性，假设$\{a, u\} \in E$。因此 v 与 a 和 b 都不同。若$\{a, v\} \in E$，则 u，a，v 是 G 中长度为 2 的路径，所以$\{a, v\} \notin E$，因此$\{b, v\} \in E$（否则 $\overline{G}$ 中有长度为 2 的路径 a，v，b)。因此$\{u, b\} \notin E$；否则 u，b，v 是 G 中长度为 2 的路径。因此，

a，v，u，b 是 $\overline{G}$ 中长度为 3 的路径，即为所求。

41. a，b，e，z　　43. a，c，b，d，e，z

45. 若 G 是可平面的，则由于 $e \leqslant 3v-6$，G 至多有 27 条边。(若 G 不连通，G 的边还要少。)同理，$\overline{G}$ 至多有 27 条边。但是 G 和 $\overline{G}$ 的并图是 K_{11}，K_{11} 有 55 条边，而 $55>27+27$。

47. 假设 G 用 k 色着色并且独立数为 i。由于每个颜色类都是独立集，所以每个颜色类有不超过 i 个元素。因此至多有 ki 个顶点。

49. a)根据 3.2 节定理 2，恰好选中 m 条边的概率是 $C(n, m)p^m(1-p)^{n-m}$。
 b)根据 3.3 节定理 2，期望值是 np。
 c)为了生成一个带标记图 G，当把这个过程应用到顶点对上时，当那对顶点之间有 G 边时，所选择的随机数 x 必定小于等于 1/2；当那里无 G 边时，x 大于 1/2。因此，做正确选择的概率对每条边来说是 1/2，对所有边来说是 $1/2^{C(n,2)}$。因此所有带标记的图是等概率的。

51. 假设 P 是单调增的。如果从简单图中删除边时，不保持不具有性质 P 这个性质，就有一个简单图 G 不具有性质 P，有另外一个简单图 G' 具有性质 P，G' 与 G 有相同顶点但是比 G 少一些边。但是性质 P 是单调增的，由于 G' 具有性质 P，所以给 G' 添加边得到的 G 也具有性质 P。这是矛盾。逆命题的证明是类似的。

第 7 章

7.1 节

1. (a)，(c)，(e)

2. a)a　b)a，b，c，d，f，h，j，q，t　c)e，g，i，k，l，m，n，o，p，r，s，u
 d)q，r　e)c　f)p　g)f，b，a　h)e，f，l，m，n

3. 否

4. 0 层：a；1 层：b，c，d；2 层：e 到 k(按字母顺序)；3 层：l 到 r；4 层：s，t；5 层：u

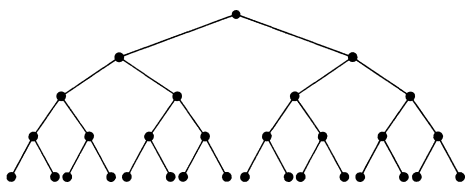
5. a)整棵树　b)c，g，h，o，p 和 4 条边 cg，ch，ho，hp　c)只有 e

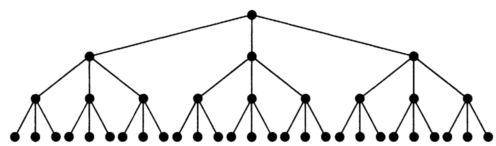
6. a)1　b)2　7. a)3　b)9

8. 9999　9. 2000　10. 999　11. 1 000 000 美元

12. 由定理 4 不存在这样的树，因为 $m=2$ 或 $m=84$ 是不可能的。

13. 高度为 4 的完全二叉树　　高度为 3 的完全 3 元树





14. a)根据定理 3，有 $n=mi+1$。因为 $i+l=n$，所以有 $l=n-i$，所以 $l=(mi+1)-i=(m-1)i+1$。
 b)有 $n=mi+1$ 和 $i+l=n$，因此 $i=n-l$，$n=m(n-l)+1$。对 n 求解就给出 $n=(ml-1)/(m-1)$。从 $i=n-l$ 得出 $i=[(ml-1)/(m-1)]-l=(l-1)/(m-1)$。

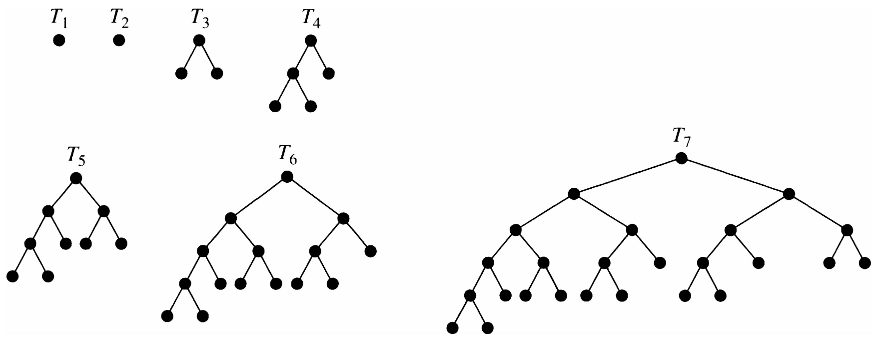
15. $n-t$　16. a)1　b)3　c)5

17. 设 $n=2^k$，其中 k 是正整数。若 $k=1$，则没有什么要证明的，因为可以用 $n-1=1$ 个处理器在 $\log 2=1$ 步里把两个数相加。假定可以在 $\log n$ 步里用 $n-1$ 个处理器的树形连接网络对 $n=2^k$ 个数求和。设 x_1，x_2，…，x_{2n} 是希望求和的 $2n=2^{k+1}$ 个数。$2n-1$ 个处理器的树形连接网络包括 $n-1$ 个处理器的树形连接网络，以及对每个树叶作为儿子的两个新处理器。在一步之内，可以用这个较大的网络的树叶来求出 x_1+x_2，x_3+x_4，…，$x_{2n-1}+x_{2n}$，结果得出 n 个数，根据归纳假设，可以用网络的其余部分在 $\log n$ 步内求它们的和。因为使用了 $\log n+1$ 步而且 $\log(2n)=\log 2+\log n=1+\log n$，所以这样就完成了证明。

18. 只有 c　19. c 和 h

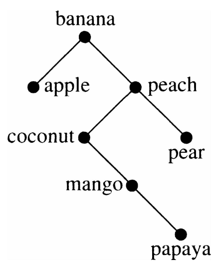
20. 假设树 T 有至少两个中心。设 u 和 v 是不同的中心，都有离心度 e，u 和 e 不相邻。因为 T 是连通的，所以有从 u 到 v 的简单通路 P。设 c 是这个通路上的任意顶点。因为 c 的离心度至少为 e，所以存在顶点 w

使得从 c 到 w 的唯一简单通路长度至少为 e。显然这条铁路不能同时包含 u 和 v，否则将有一条简单回路。事实上，一旦这条从 c 到 w 的通路可能沿着 P 的一部分向 u 或 v 前进，它就离开 P 并且不返回 P。不失一般性，假定这条通路不沿着 P 向 u 前进。于是从 u 到 c 到 w 的通路是简单的，而且长度不超过 e，矛盾。因此 u 和 v 是相邻的。现在因为任何两个中心都是相邻的，所以假如有多于两个的中心，那么 T 就包含简单回路 K_3 作为子图，这是矛盾。

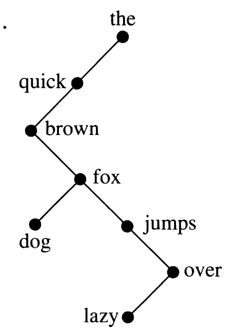
21. 

22. 命题称有 n 个顶点的"每个"树都有长度为 $n-1$ 的路径。而证明只示出存在某个 n 个顶点的树有长度为 $n-1$的路径。

7.2 节

1. 

2. a) 3　　b) 1　　c) 4　　d) 5

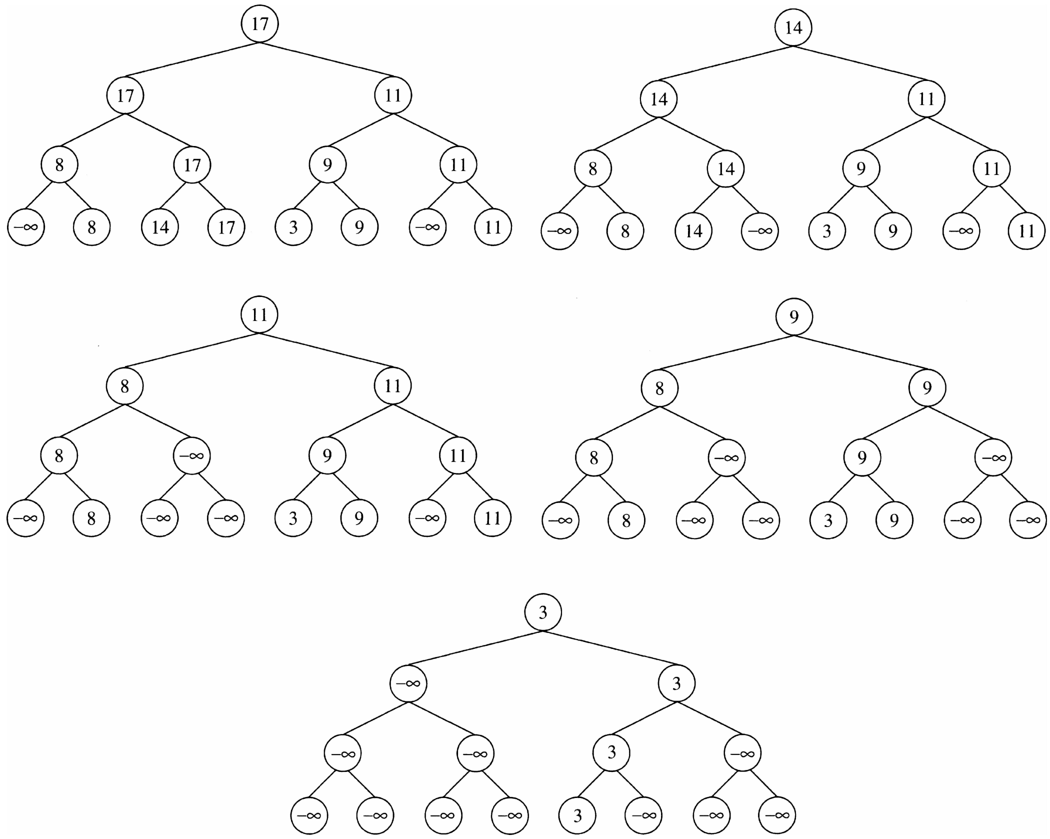
3. 

4. 至少需要 $\lceil \log_3 4 \rceil = 2$ 次称重，因为只有四种结果(因为不要求确定硬币是较轻还是较重)。事实上，两次称重是足够的。首先称重硬币 1 和硬币 2。若它们平衡，则称重硬币 1 和硬币 3。若硬币 1 与硬币 3 重量相同，则硬币 4 是伪币，若它们重量不相同，则硬币 3 是伪币。若硬币 1 与硬币 2 重量不相同，则再称重硬币 1 和硬币 3。若它们平衡，则硬币 2 是伪币；若它们不平衡，则硬币 1 是伪币。

5. 至少需要 $\lceil \log_3 13 \rceil = 3$ 次称重。事实上，三次称重是足够的。首先把硬币 1，2 和 3 放在天平的左边，而把硬币 4，5 和 6 放在天平的右边。若相等，则应用例 2 到硬币 1，2，7，8，9，10，11 和 12 上。若不相等，则应用例 2 到硬币 1，2，3，4，5，6，7 和 8 上。

6. 最少比较 5 次。称这些元素为 a，b，c，d。先比较 a 和 b，再比较 c 和 d。不失一般性，假设 $a<b$ 和 $c<d$。再比较 a 和 c，其中较小的那个就是最小元素。仍不失一般性，假设 $a<c$。最后让 b 与 c 和 d 比较，就完全确定它们的顺序。

7. 前两步如课本所叙。在确定了 22 是第二大元素之后，在树中用 $-\infty$ 代替树叶 22，并沿着 22 上升到树根所经过的路径从树叶开始重新计算胜者。于是看到 17 是第三大元素，所以重复上述过程：在树中用 $-\infty$ 代替树叶 17 并重新计算。于是看到 14 是第四大元素，所以重复上述过程：在树中用 $-\infty$ 代替树叶 14 并重新计算。于是看到 11 是第五大元素，所以重复上述过程：在树中用 $-\infty$ 代替树叶 11 并重新计算。就这样继续这个过程。确定 9 是第六大元素，8 是第七大元素，3 是第八大元素。除了倒数第 2 步以外，所有其余步骤所产生的树如下图所示。



8. 顶点的值是目前在那里的表元素，顶点的标记是导致那个值的树叶的名称(即位置)。

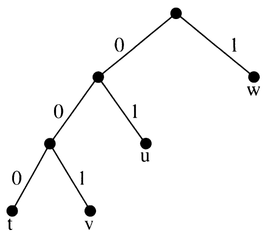
procedure *tournament sort*(a_1，…，a_n)
k ∶= $\lceil \log n \rceil$
建立高度为 k 的二叉树
for i ∶= 1 **to** n
  令第 i 个树叶的值是 a_i，令第 i 个树叶的标记为其自身
for i ∶= $n+1$ **to** 2^k
  令第 i 个树叶的值是 $-\infty$，令第 i 个树叶的标记为其自身
for i ∶= $k-1$ **downto** 0
  for 第 i 层上每个顶点 v
    令 v 的值是子女中的较大值，令 v 的标记为有较大值的那个子女的标记
for i ∶= 1 **to** n
begin
  c_i ∶= 根的值
  令 v 是根的标记
  令 v 的值是 $-\infty$
  while 根的标记仍是 v
  begin
    v ∶= *parent*(v)
    令 v 的值是子女中的较大值，令 v 的标记为有较大值的那个子女的标记
  end
end{c_1，…，c_n 是非降序排列的表}

9. $k-1$，其中 $n=2^k$　　10. a)是　　b)否　　c)是　　d)是

11. a：000，e：001，i：01，k：1100，o：1101，p：11110，u：11111

12. a：11；b：101；c：100；d：01；e：00；2.25 位(注意：这个编码取决于如何打破平局，但平均位数总是一样的。)

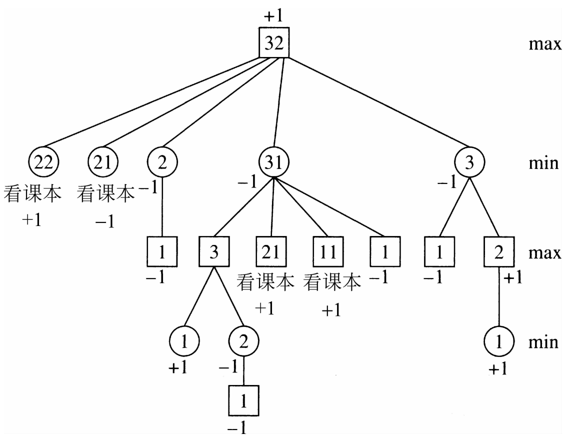
13. 总共有四种可能的答案。这里给出一种，通过在这一种中交换 t 与 v 和(或)交换 u 与 w 来得到另外三种。



14. A：0001；B：101001；C：11001；D：00000；E：100；F：001100；G：001101；H：0101；I：0100；J：110100101；K：1101000；L：00001；M：10101；N：0110；O：0010；P：101000；Q：1101001000；R：1011；S：0111；T：111；U：00111；V：110101；W：11000；X：11010011；Y：11011；Z：1101001001。

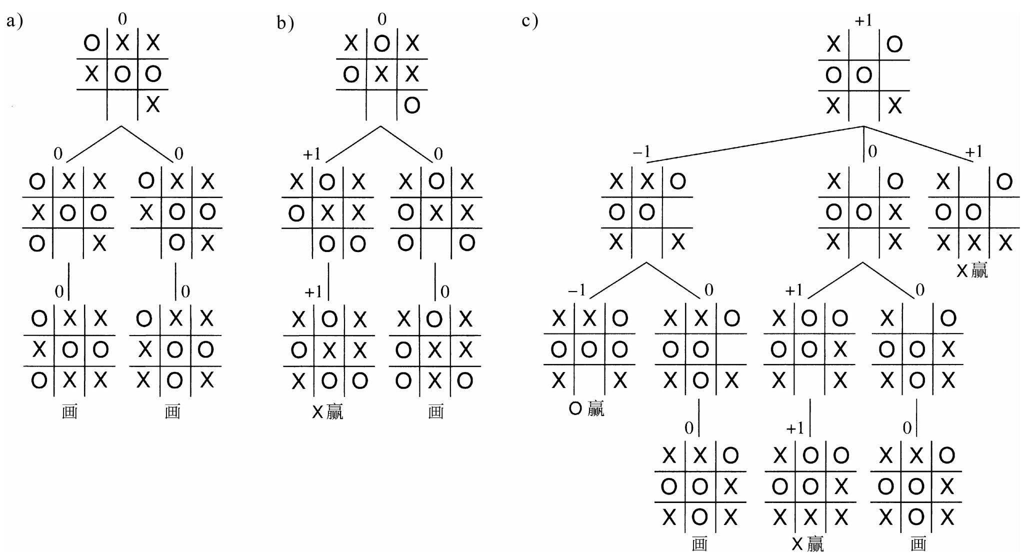
15. A：2；E：1；N：010；R：011；T：02；Z：00。　　16. n

17. 由于这棵树比较大，所以在有些地方标明了"看课本"。参看图 7-24；以方框或圆圈顶点为根的子树与图 7-24 中的对应子树完全一样。先手获胜。



18. a) \$1　　b) \$3　　c) －\$3

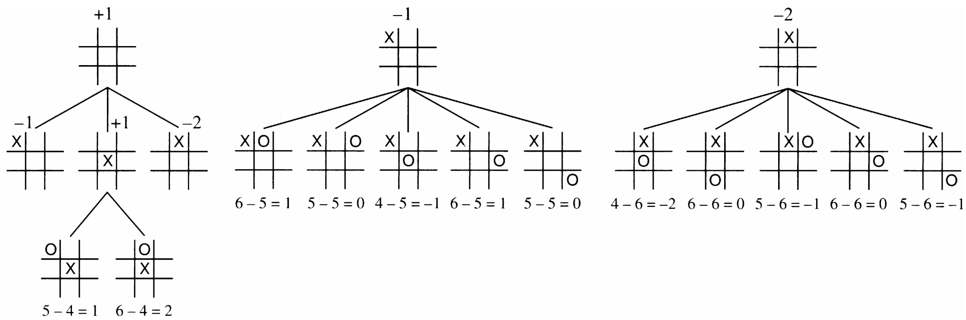
19. 参看下图。a)0　　b)0　　c)1　　d)这种局面不可能发生在游戏中；这个图是不可能的。



20. 用强归纳法证明。基础步骤：当每堆有 $n=2$ 块石子时，若选手一从一堆取走两块石子，则选手二从剩下那堆取一块石子而获胜。若选手一从一堆取走一块石子，则选手二从另一堆取两块石子而获胜。归纳步骤：假设归纳假设，即对于所有 $2\leqslant j\leqslant k$，如果游戏从两堆各有 j 块的石子开始，则选手二获胜，其中 $k\geqslant 2$。考虑两堆各有 $k+1$ 块石子的游戏。若选手一从一堆取走所有石子，则选手二从剩下那堆取走除了一块外的所有石子而获胜。否则选手一在一堆中留下 j 块石子，其中 $2\leqslant j\leqslant k$，而在另一堆留下 $k+1$ 块石子。选手二从较大的一堆取走同样多石子，也给这堆留下 j 块石子。此时的游戏包含各有 j 块的两堆石子。根据归纳假设，在目前游戏中选手二(也是实际游戏中的选手二)获胜，强归纳法完成了。

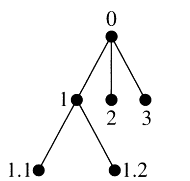
21. 7；49

22. 树的值是 1。注意：第二和第三棵树是第一棵树树根两个子女的子树，其子树由于篇幅限制而没有显示。应当认为把它们嫁接到第一幅图中。



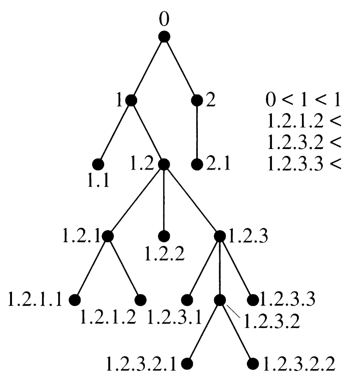
7.3 节

1.



0 < 1 < 1.1 < 1.2 < 2 < 3

2.



0 < 1 < 1.1 < 1.2 < 1.2.1 < 1.2.1.1 < 1.2.1.2 < 1.2.2 < 1.2.3 < 1.2.3.1 < 1.2.3.2 < 1.2.3.2.1 < 1.2.3.2.2 < 1.2.3.3 < 2 < 2.1

3. 否

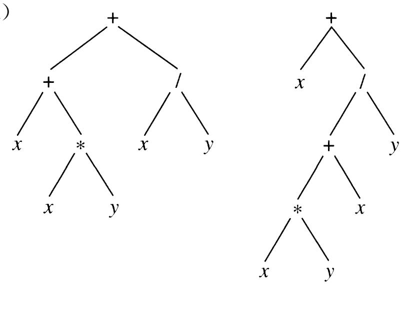
4. a，b，d，e，f，g，c

5. a，b，e，k，l，m，f，g，n，r，s，c，d，h，o，i，j，p，q

6. d，f，g，e，b，c，a

7. k，l，m，e，f，r，s，n，g，b，c，o，h，i，p，q，j，d，a

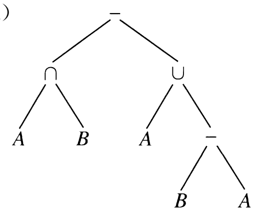
8. a)



b) $++x*xy/xy$，$+x/+*xyxy$　　c) $xxy*+xy/+$，$xxy*x+y/+$

d) $((x+(x*y))+(x/y))$，$(x+(((x*y)+x)/y))$

9. a)

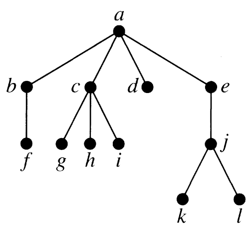


b) $-\cap AB\cup A-BA$　　c) $AB\cap ABA-\cup-$　　d) $((A\cap B)-(A\cup(B-A)))$

10. 14

11. a) 1　　b) 1　　c) 4　　d) 2205

12.



13. 用数学归纳法。对一个元素的表来说结果是平凡的。假定对 n 个元素的表来说结果为真。对于归纳步骤，从后面开始。找出表后面的顶点序列，从最后一个树叶开始，到根结束，每个顶点都是它后面那个顶点的最后一个儿子。删除这个树叶并且应用归纳假设。

14. 在每种情形里分别为 c，d，b，f，g，h，e，a。

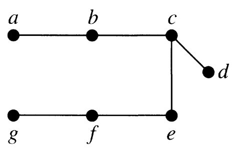
15. 用数学归纳法证明。设 $S(X)$ 和 $O(X)$ 分别表示合式公式 X 里的符号数和运算数。对长度为 1 的合式公式来说命题为真，因为它们都有 1 个符号和 0 个运算。假定对长度小于 n 的合式公式来说命题为真。长度为 n 的合式公式必然形如 $*XY$，其中 $*$ 是运算而 X 和 Y 都是长度小于 n 的合式公式。于是根据归纳假设 $S(*XY)=S(X)+S(Y)=(O(X)+1)+(O(Y)+1)=O(X)+O(Y)+2$。因为 $O(*XY)=1+O(X)+O(Y)$，所以 $S(*XY)=O(*XY)+1$。

16. 例如 $xy+zz\circ+x\circ$，$xyz++yx++$，$xyxy\circ\circ xy\circ\circ z\circ+$，$xz\times zz+\circ$，$yyyy\circ\circ\circ$，$zx+yz+\circ$

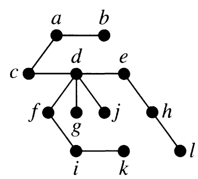
7.4 节

1. $m-n+1$

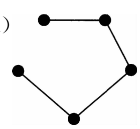
2.



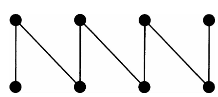
3.



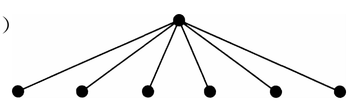
4. a)



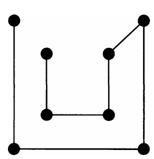
b)



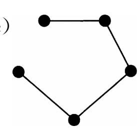
c)



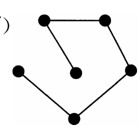
d)

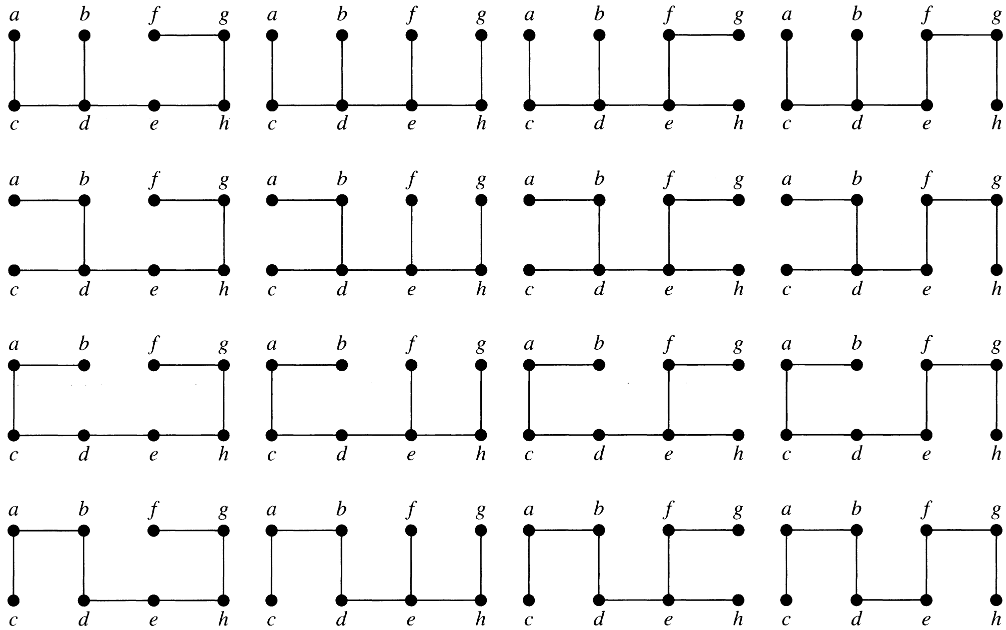


e)

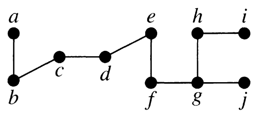


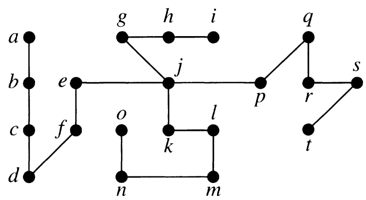
f)



5. 

6. a)3　　b)16　　c)4　　d)5

7. 

8. 

9. a)长度为 6 的路径　　b)长度为 5 的路径
   c)长度为 6 的路径　　d)与访问顶点的选择顺序有关；可能是长度为 7 的路径

10. 采用宽度优先搜索，初始顶点是中心顶点，处理该顶点时把 n 个轮辐顶点加入树中，因此产生的树是 $K_{1,n}$。采用深度优先搜索，从轮图的中心顶点开始，并访问一个相邻顶点(边缘上顶点中的一个)。从这个顶点转移到边缘上一个相邻顶点，继续这样绕圈下去，直到已经到达了每个顶点。因此产生的生成树是长度为 n 的路径。

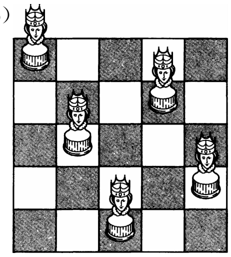
11. 采用宽度优先搜索，第一步从一个 m 度顶点辐射到所有 n 度顶点。下一步处理一个 n 度顶点，加入从这个顶点到所有剩余 m 度顶点的边。结果是一个 $K_{1,n-1}$ 和一个 $K_{1,m-1}$，中心用一边相连。采用深度优先搜索，从一边到另一边来回移动，直到不能前进为止。如果 $m=n$ 或 $m=n-1$，则得到长度为 $m+n-1$ 的路径。否则，该路径停在较大集合中的已经访问了一些顶点处，再返回到该路径上到顶点 v 的一个链接，然后，继续访问从顶点 v 出发的集合中的剩余顶点。

12. 一组可能不再继续下去的航班是：波士顿—纽约，底特律—波士顿，波士顿—华盛顿，纽约—华盛顿，纽约—芝加哥，亚特兰大—华盛顿，亚特兰大—达拉斯，亚特兰大—洛杉矶，亚特兰大—圣路易斯，圣路易斯—达拉斯，圣路易斯—底特律，圣路易斯—丹佛，达拉斯—圣迭哥，达拉斯—洛杉矶，达拉斯—旧金山，圣迭哥—洛杉矶，洛杉矶—旧金山，旧金山—西雅图。

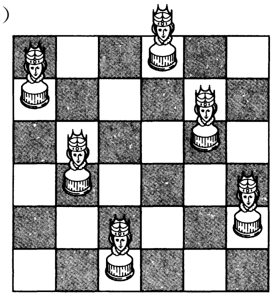
13. 树

14. 通过对通路的长度进行归纳来证明：若通路长度为 0，则结果是平凡的。若长度为 1，则 u 是与 v 相邻的，所以 u 是在宽度优先生成树的 1 层上。假定对长度为 l 的通路来说结果为真。若通路长度为 $l+1$，则设 u'是从 v 到 u 的最短通路上倒数第二个顶点。根据归纳假设，u'是在宽度优先生成树的 l 层上。假如 u 是在不超过 l 的层上，那么显然从 v 到 u 的最短通路的长度也不超过 l。所以在添加 l 层的顶点之后，仍然没有添加 u 到宽度优先生成树上。因为 u 是与 u'相邻的，所以将把它添加在 $l+1$ 层上(尽管连接 u'和 u 的边不必添加)。

15. a)无解 b)

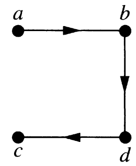


c)

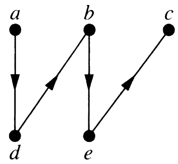


16. 从某个顶点开始并且沿着一条通路前进，尽量不重复经过顶点，在所有顶点都已经访问过之后，允许返回到出发点。当不可能沿着一条通路继续下去时，就回溯并且尝试当前通路的另外一种扩充。
17. 取 G 的连通分支的生成树的并图。它们都是不相交的，所以结果是一个森林。
18. $m-n+c$
19. 在每个分支上使用深度优先搜索。
20. 如果在深度优先搜索过程中处理顶点 u 时，没有沿着边 uv 前进，则只能是这样的情形，就是已经访问过顶点 v 了。有两种情形。如果是在开始处理 u 之后访问的 v，则由于还没有结束处理 u，所以 v 一定出现在以 u 为根的子树中(因此一定是 u 的后代)。另一方面，如果是在开始处理 u 之前已经开始处理 v 了，那么为什么在那时没有沿着这条边前进呢？所以一定是还没有结束处理 v，换句话说，还在构造以 v 为根的子树，所以 u 是 v 的后代，因此 v 是 u 的祖先。
21. 如果正在处理的图本身是棵树，则这两个过程肯定产生相同的生成树，因为在这种情形下，只有一棵生成树(整个图)。而且这也是发生这种情况的唯一情形。如果原图有任何其他的边，则根据练习 20，这些边一定是后退边，因此把一个顶点连到祖先或后代，而这些边一定连接同层上或相差一层上的顶点。显然这两种可能性是互斥的。因此如果两棵生成树注定是相同的，则除了树上的边之外没有其他的边了。
22. 由于在这个过程中不沿着生成树以外的边前进，所以可以忽略这些边。因此可以假设这个图起初是一棵根树。基础情形是平凡的(只有一个顶点)，所以假设归纳假设，即应用在 n 个顶点的树上的宽度优先搜索按照顶点在树上的层次来访问这些顶点。考虑有 $n+1$ 个顶点的树 T。在这个树的宽度优先搜索中，最后一个访问的顶点是最后一个加入等待处理顶点表的那个顶点。当正在处理这个顶点的父母(比如说 u)时加入这个顶点。必须证明 v 是在树的最低(最底，即层数最大)的层上。假如不是这样，比如说顶点 x 是在更低层上，x 的父母是 w。则 w 是在比 u 更低的层上。显然 v 一定是树叶，因为在看见 v 之前不应该看见 v 的任何子女。考虑从 T 删除 v 后得到的树 T'。根据归纳假设，T' 中的顶点一定是按照其在 T' 中的层次来处理的(这个层次与其在 T 中的层次相同，T' 中少了 v 对算法其余部分没有影响)。因此一定在 w 之前处理过 u 了，因此 v 应当在 x 之前加入等待表，矛盾。因此 v 是在树的最底层，证毕。
23. 这样修改算法 2 给出的伪代码：在算法开头把 m 初始化为 0，在从 L 删除 v 的语句后增加语句“$m:=m+1$”和“把 m 赋给顶点 v”。
24. 如果在深度优先搜索过程中处理有向边 uv 的起点 u 时，没有沿着边 uv 前进，则只能是这样的情形，就是已经访问过顶点 v 了。有三种情形。如果是在开始处理 u 之后访问的 v，则由于还没有结束处理 u，所以 v 一定出现在以 u 为根的子树中(因此一定是 u 的后代)，所以有一条前进边。否则，在开始处理 u 之前一定已经开始处理 v 了。如果还没有结束处理 v(即还在构造以 v 为根的子树)，则 u 是 v 的后代，因此 v 是 u 的祖先(有一条后退边)。最后，如果已经结束了处理 v，则根据定义，就有了一条交叉边。
25. 设 T 是在图 7-41 里构造的生成树，而 T_1，T_2，T_3 和 T_4 是在图 7-42 里的生成树。用 $d(T', T'')$ 表示 T' 与 T'' 之间的距离。则 $d(T, T_1)=6$，$d(T, T_2)=4$，$d(T, T_3)=4$，$d(T, T_4)=2$，$d(T_1, T_2)=4$，$d(T_1, T_3)=4$，$d(T_1, T_4)=6$，$d(T_2, T_3)=4$，$d(T_2, T_4)=2$，$d(T_3, T_4)=4$。
26. 假定 $e_1=\{u, v\}$ 是像规定的那样。则 $T_2\cup\{e_1\}$ 包含一个包含 e_1 的简单回路 C。图 $T_1-\{e_1\}$ 包含两个连通分支；e_1 的端点是在两个不同的分支里。从 u 开始按照与 e_1 相反的方向前进，直到你来到 v 所在的分支里第一个顶点为止。刚刚经过的边是 e_2。显然 $T_2\cup\{e_1\}-\{e_2\}$ 是树，因为 e_2 是在 C 上。另外 $T_1-\{e_1\}\cup\{e_2\}$ 也是树，因为 e_2 重新连接这两个分支。

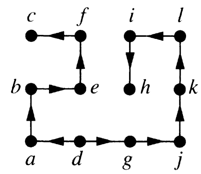
27. 练习 10：



练习 11：



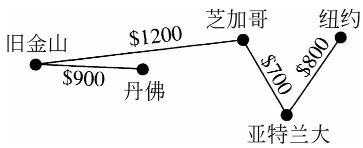
练习 12：



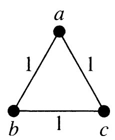
28. 首先构造这个有向图里的欧拉回路。然后从这个回路删除通向从前访问过的顶点的每条边。

7.5 节

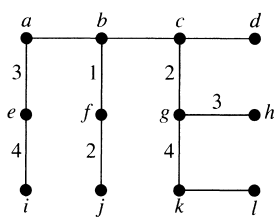
1. Deep Springs-Oasis，Oasis-Dyer，Oasis-Silverspeak，Silverspeak-Goldfield，Lida-Gold Point，Gold Point-Beatty，Lida-Goldfield，Goldfield-Tonopah，Tonopah-Manhattan，Tonopah-Warm Springs
2. $\{e, f\}$，$\{c, f\}$，$\{e, h\}$，$\{h, i\}$，$\{b, c\}$，$\{b, d\}$，$\{a, d\}$，$\{g, h\}$
3.



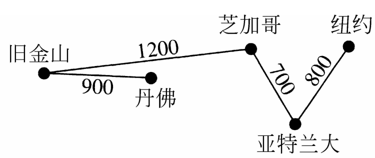
4. $\{e, f\}$，$\{a, d\}$，$\{h, i\}$，$\{b, d\}$，$\{c, f\}$，$\{e, h\}$，$\{b, c\}$，$\{g, h\}$
5.



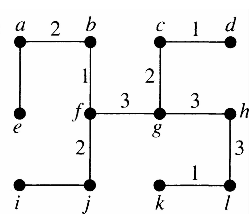
6. 在每阶段不选最小边，而是选性质相同的最大边。
7. 首先求 n 阶图 G 的最小生成树 T。然后对 $i=1$ 到 $n-1$，只从 G 中删除 T 的第 i 条边，并求剩余图的最小生成树。从这 $n-1$ 个树中挑选长度最短的一个。
8. 如果所有边的大小都不同，在普林算法的正确性证明中，当把边 e_{k+1} 加入 T 并删除边 e 时就得出矛盾，而不是可能产生另一个生成树。
9.



10. a)



b)



11. 索林算法每个阶段都产生森林。因此在选择 $n-1$ 条边后就产生树。还需证明这个树是最小生成树。设 T 是与索林树 S 具有最多公共边的最小生成树。如果 $T\neq S$，则存在边 $e\in S-T$，在算法的某个阶段 e 被加入，而在那个阶段之前，S 中所有的边也都在 T 中。$T\cup\{e\}$ 包含唯一的简单回路。在这个回路上找这样的边 $e'\in S-T$ 和 $e''\in T-S$，当把这个阶段的各个树看作“超顶点”时，e' 和 e'' 是“相邻的”。则根据这个算法，$w(e')\leqslant w(e'')$。于是把 T 换成 $T-\{e''\}\cup\{e'\}$ 就产生出比 T 更接近 S 的最小生成树。
12. 这 r 个树每一个都用一条新边至少连到一个其他的树上。因此结果中至多有 $r/2$ 个树(每个新树包含两个以上老树)。为了这样做，需要加入 $r-(r/2)=r/2$ 条边。因为加入边的数目是整数，所以至少是 $\lceil r/2\rceil$。
13. 如果 $k\geqslant\log n$，则 $n/2^k\leqslant 1$，故 $\lceil n/2^k\rceil=1$，所以，这个算法至多在 $\log n$ 次迭代后终止。

补充练习

1. 假设 T 是树，显然 T 没有简单回路。如果加入边 e 连接两个不相邻顶点 u 和 v，显然形成一个简单回路，因为把 e 加入 T 导致了图有太多的边而不再是树。形成的唯一简单回路包含边 e 和 T 中从 u 到 v 的唯一路径 P。假设 T 满足给定条件。只需证明 T 连通，因为图中没有简单回路。设 u 和 v 在不同连通分支里。加入边 $e=\{u, v\}$ 就不满足题目中的条件。

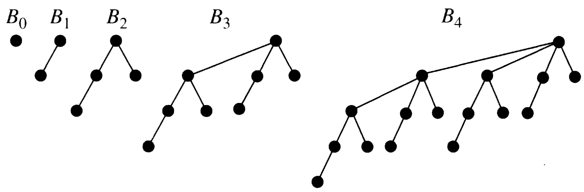
3. 假设树 T 有 n 个顶点，度分别为 $d_1, d_2, \cdots, d_n$，因为 $2e=\sum_{i=1}^{n} d_i$ 且 $e=n-1$，则有 $2(n-1)=\sum_{i=1}^{n} d_i$。因为每个 $d_i \geqslant 1$，所以 $2(n-1)=n+\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)$，即 $n-2=\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)$。于是和中至多有 $n-2$ 项可以大于等于 1。故其中至少两项为 0。所以至少对两个 i 值有 $d_i=1$。

5. $2n-2$

7. T 没有回路，故不可能有子图同胚于 $K_{3,3}$ 或 K_5。

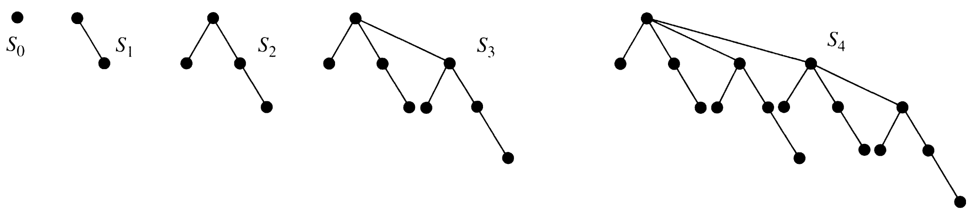
9. 分别给每个连通分支着色。对每个连通分支，首先确定树根，然后把所有偶数层顶点染成红色，把所有奇数层顶点染成蓝色。

11. 上界：k^h；下界：$2\lceil k/2\rceil^{h-1}$。

13. 

15. 由于 B_{k+1} 由两个 B_k 构成，其中一个下移一层，故 k 每加 1 高度亦加 1。由于 B_0 高度为 0，经归纳得出 B_k 高度为 k。

17. 由于 B_{k+1} 的根是 B_k 的根外加一个子女(即另一个 B_k 的根)，故 k 每加 1 根的度亦加 1。由于 B_0 的根的度为 0，经归纳得出 B_k 的根的度为 k。

19. 

21. 用数学归纳法。对 $k=0$ 结果为平凡的。假设结果对 $k-1$ 成立。T_{k-1} 是 T 的母树。根据归纳法，T 的子树可从 $T_0, \cdots, T_{k-2}$ 按所述方式得到。r_{k-2} 与 r_{k-1} 的最终相连是按照 S_k 树的定义中的描述。

23. **procedure** *level*(T：带根 r 的有序根树)

    queue ∶= 只含根 r 的序列

    while *queue* 至少还含有一项

    begin

    　v ∶= 队列中的第一个顶点

    　列出 v

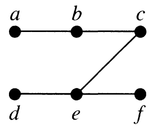
    　从队列中删除 v 并把 v 的子女加入队尾

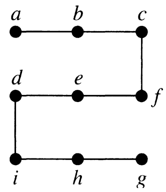
    end

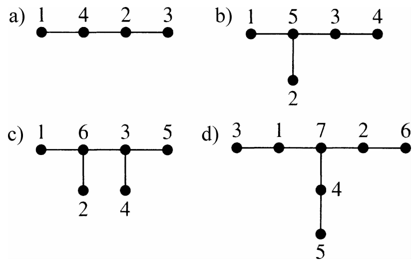
25. 这样构造树：对地址 0，插入树根。对每个带标记 i(i 是正整数)的顶点，插入子树，这个子树是从每个带标记 i, j(j 是正整数)的顶点的子树构造出来的。

27. a)是　　b)否　　c)是

29. 得到的图没有边是在超过一个的所述类型的简单回路上，所以是仙人掌图。

31. 

33. 

35. 

37. 6

39. (a)0 表示 00，11 表示 01，100 表示 10，101 表示 11(具体编码与如何消除平局有关，但所有编码都是等价的)；对长度为 n 的串平均长度是 $0.645n$。(b)0 表示 000，100 表示 001，101 表示 010，110 表示 100，11100 表示 011，11101 表示 101，11110 表示 110，11111 表示 111(具体编码与如何消除平局有关，但所有编码都是等价的)；对长度为 n 的串平均长度是 $0.532\overline{6}n$。

41. 设从 G 删除顶点 v 和 v 关联的所有边后得到图 G'。可以这样得到 G 的最小生成树：取 v 关联的最小边和 G' 的一个最小生成树。

43. 假设边 e 是顶点 v 关联的最小边，假设 T 是不含 e 的最小生成树。把 e 加入 T，从因此形成的简单回路中删除与 v 关联的另一条边。将得到严格更小的一个生成树(因为删除的边比 e 大)。矛盾，所以 T 必含 e。