2014-2015 学年第二学期高等数学试题(A)答案

1. $18\sqrt{2}$

2. $f_1' - \frac{1}{x^2} f_2' + xyf_{11}'' - \frac{y}{x^3} f_{22}''$

3. $\frac{7}{54}$

4. $\frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-5}{0}$

5. $-\frac{27}{4}$

6.**C** **7.C** **8. C** **9.A**

10. D

解：直线 l_1 的对称式方程为 $l_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$.

记两直线的方向向量分别为 $\vec{l_1} = (1,1,0)$，$\vec{l_2} = (4,-2,-1)$，

两直线上的定点分别为 $P_1(0,0,0)$ 和 $P_2(2,1,3)$，

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = (2,1,3),\quad \vec{l_1} \times \vec{l_2} = (-1,1,-6).$$

由向量的性质可知，两直线的距离

$$d = \left| \frac{\vec{a} \cdot (\vec{l_1} \times \vec{l_2})}{|\vec{l_1} \times \vec{l_2}|} \right| = \frac{|-2+1-18|}{\sqrt{1+1+36}} = \frac{19}{\sqrt{38}} = \sqrt{\frac{19}{2}}.$$

11.

解 设 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = S(x)$，显然 $S(0)=1$. 于是

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \qquad (|x| < 1),$$

利用性质 3，得

$$[xS(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

对上式从 0 到 x 积分，得

$$xS(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} \mathrm{d}t = -\ln(1-x).$$

于是当 $x \neq 0$ 时，有 $S(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x)$，从而

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}\ln(1-x), & 0 < |x| < 1, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

12.

解 积分区域 Ω 如图所示. 当 θ 与 φ 取定值时所决定的射线 r 由 $r=0$ 穿入区域 Ω, 由球面穿出 Ω, 该球面在球面坐标系下的方程由 (11.2.11) 式知 $r^2=2r\cos\varphi$, 即 $r=2\cos\varphi$; 同理，圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在球面坐标系中的方程为 $r\sin\varphi=r\cos\varphi$, 即 $\tan\varphi=1$, 或 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$. 因而 Ω 在球面坐标系中的不等式组表示为: $\Omega=\{(r,\varphi,\theta)\,|\,0\le r\le 2\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4},\ 0\le\theta\le 2\pi\}$.

从而有

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

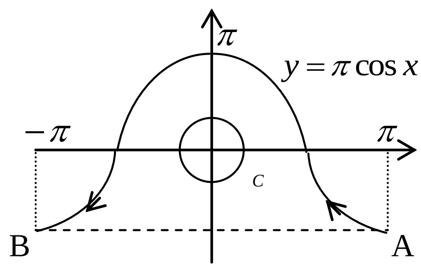
$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{2\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{5}\pi(4\sqrt{2}-1).$$

13.

解 (1) $P(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y)=-\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$,

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.



故由格林公式 $\displaystyle\int_L+\int_{BA}+\oint_{c顺}=0$.

所以 $\displaystyle\int_L=\int_{AB}+\oint_{c逆}$.

$$\int_{AB}\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\overset{y=-\pi}{=}\int_{\pi}^{-\pi}\frac{x-\pi}{x^2+\pi^2}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{x^2+\pi^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

$$\oint_c\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$\overset{\begin{cases}x=R\cos t\\y=R\sin t\end{cases}}{=}\int_0^{2\pi}\frac{(R\cos t+R\sin t)(-R\sin t)-(R\cos t-R\sin t)R\cos t}{R^2}\mathrm{d}t=-2\pi$$

$$\therefore\quad I=-\frac{3}{2}\pi.$$

14.

解 因为在球面 Σ 上，$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=a$，根据(10.6.5)式有

$$I=a\oiint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3aV$$

$$=3a\cdot\frac{4\pi}{3}a^3=4\pi a^4.$$

15.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{ax+by}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+au(x,y)\right]$，$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{ax+by}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+bu(x,y)\right]$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{ax+by}\left[b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}+abu(x,y)\right].$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=e^{ax+by}\left[(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)\right],$$

若使$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$，只有

$$(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)=0,$$

即 $a=b=1$.

16.

解　由 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 与 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$　得 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，因图形关于 y 轴对称，

所以　$S_n=2\int_0^{a_n}\left[nx^2+\frac{1}{n}-(n+1)x^2-\frac{1}{n+1}\right]dx$

$=2\int_0^{a_n}\left[\frac{1}{n(n+1)}-x^2\right]dx=\frac{4}{3}\frac{1}{n(n+1)\sqrt{n(n+1)}}$，

因此 $\frac{S_n}{a_n}=\frac{4}{3}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{4}{3}$.

17.

解　$F(t)=\iiint_{\Omega_t}[z^2+f(x^2+y^2)]dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t rdr\int_0^h[z^2+f(r^2)]dz$

$=2\pi\int_0^t(\frac{1}{3}h^3+hf(r^2))rdr$　　故得　$\frac{dF}{dt}=2\pi(\frac{1}{3}h^3+hf(t^2))t$

又因为　$\lim_{t\to 0^+}2\pi\int_0^t(\frac{1}{3}h^3+hf(t^2))rdr=\lim_{t\to 0^+}F(t)=0$所以，$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}$是“$\frac{0}{0}$”型，

利用洛必塔法则，有　$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi t(\frac{1}{3}h^3+hf(r^2))}{2t}=\pi(\frac{1}{3}h^3+hf(0)).$